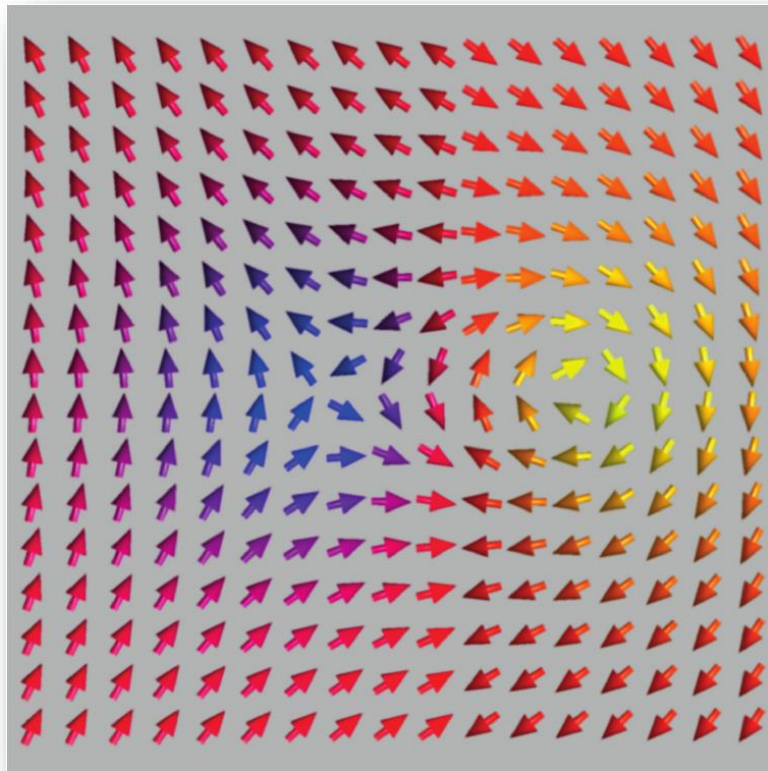


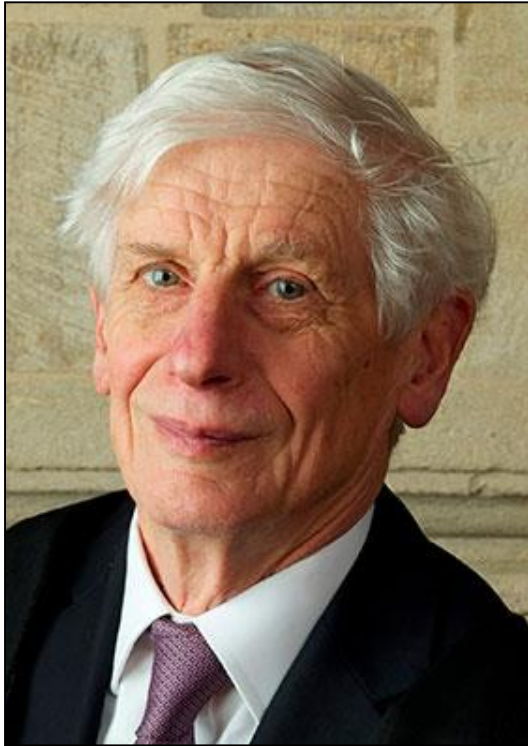
Topologia i Física Quàntica en Diàleg: Premi Nobel de Física 2016



Roser Valentí
Institut de Física Teòrica
Universitat de Frankfurt



Premi Nobel de Física 2016



David Thouless
Universitat de Washington,
Seattle USA



Michael Kosterlitz
Universitat de Brown,
Providence USA



Duncan Haldane
Universitat de Princeton,
USA

„per descobriments teòrics de transicions de fase topològiques i estats topològics de la matèria“

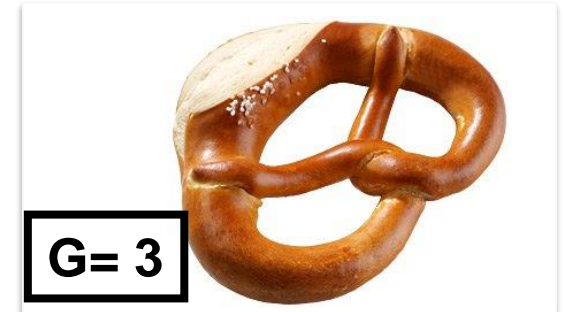
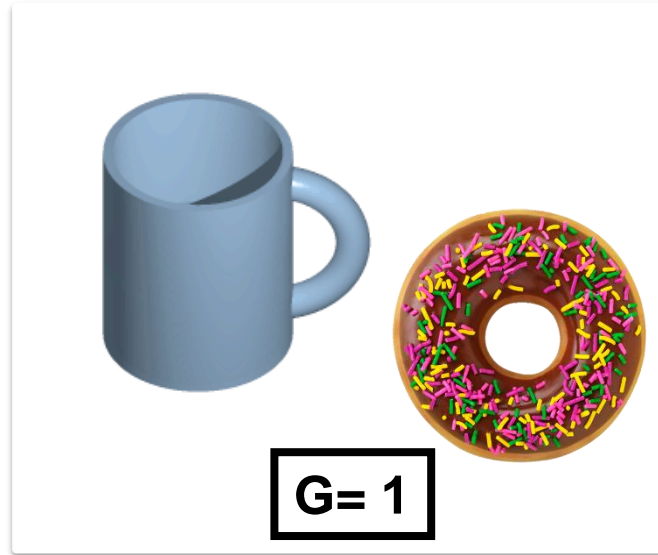
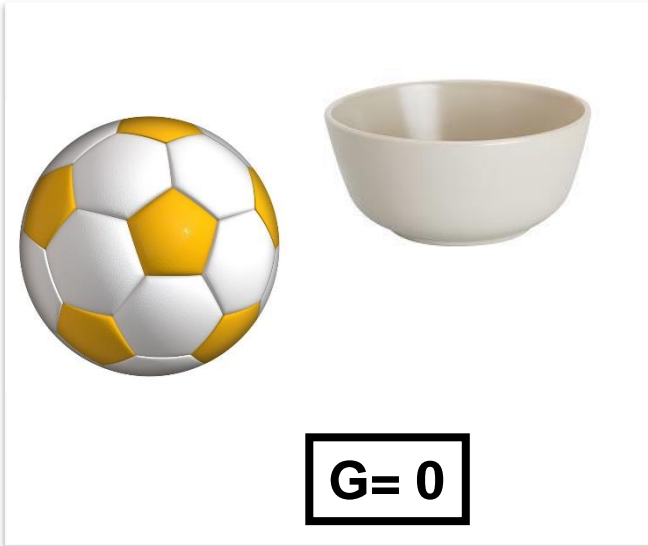
- ***topologia - inicis***
- ***física \leftrightarrow topologia: primers encontres***
- ***física quàntica***
- ***transicions de fase \rightarrow topologia***
- ***topologia dels estats quàntics***
- ***revolució tecnològica: ordinadors quàntics, spintronica, ...***

grec: τόπος „lloc“ λόγος „estudi“

Estudi de les **propietats** dels cossos que permaneixen **intactes** sota **deformacions continues** (estirar o doblegar)

GENUS =
nombre de
forats ---- propietat **global**

grec: τόπος „lloc“ λόγος „estudi“



Estudi de les **propietats** dels cossos que permaneixen **intactes** sota **deformacions continues** (estirar o doblegar)

→ Propietats geomètriques (com la curvatura) són **propietats locals**

→ Però integrals sobre propietats geomètriques locals defineixen **la topologia global**.

Integral de Gauss-Bonnet

$$\int d^2\mathbf{r} (\text{Gaussian curvature}) = 4\pi(1 - \text{genus})$$

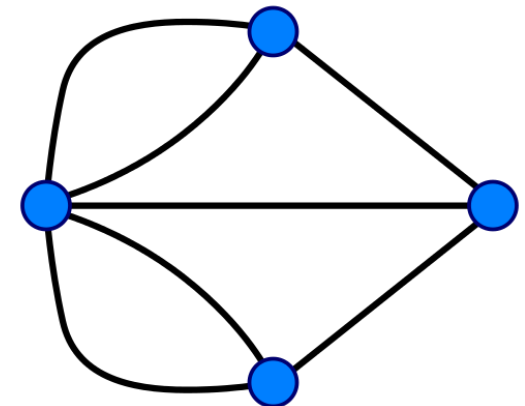
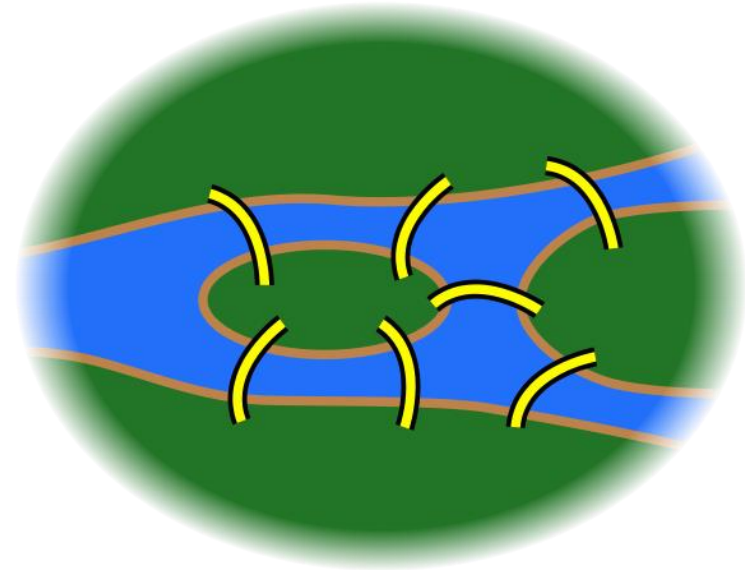
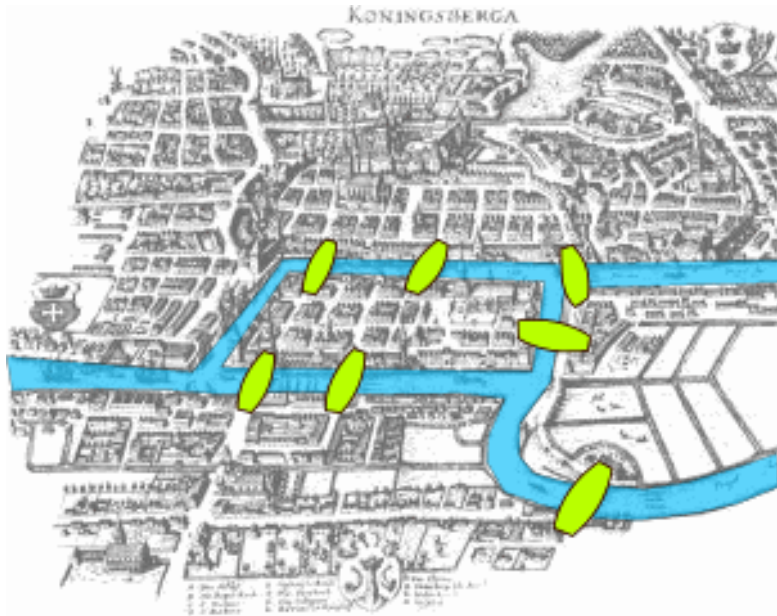
La esfera

$$4\pi r^2 \times \frac{1}{r^2} = 4\pi(1-0)$$

↑
Index GLOBAL

(Haldane)

Inici del concepte “topologia”



Segle XVII: Leonhard Euler (set ponts de Königsberg)

Es possible trobar un camí a Königsberg que travessi cada pont sols una vegada?

(teoria de grafs)

connectivitat

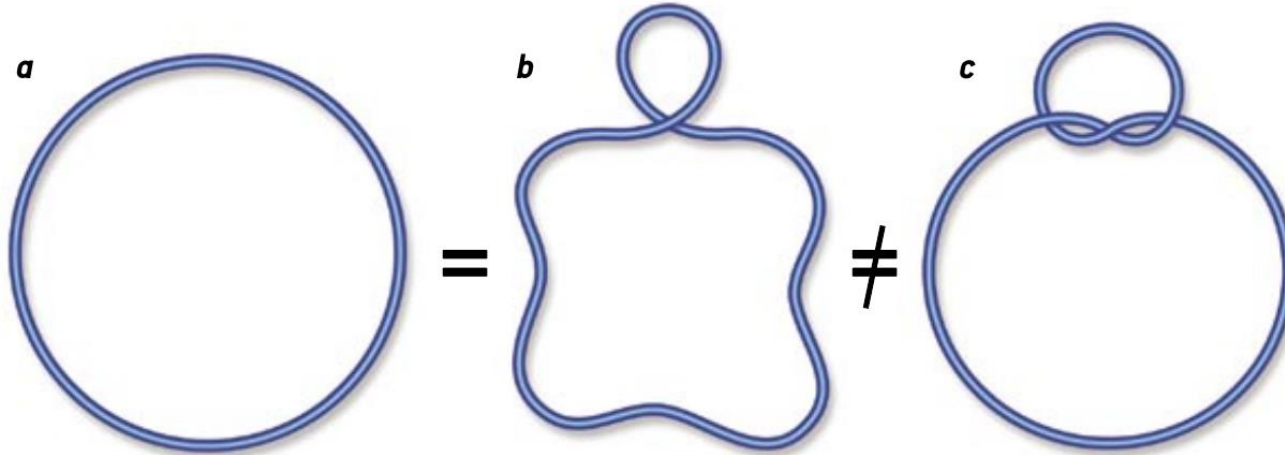
Segle XVII: Alexandre-Theophile Vandermonde

Segle XIX: Listing, Gauss, Tait



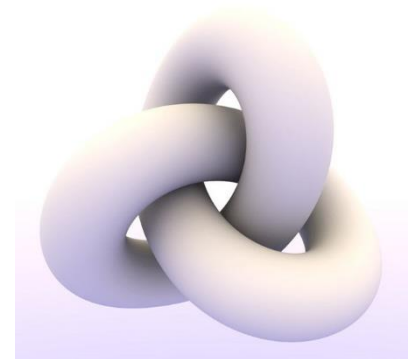
Nus cèltic

Libre de Kells
(Irlanda) ~ 800



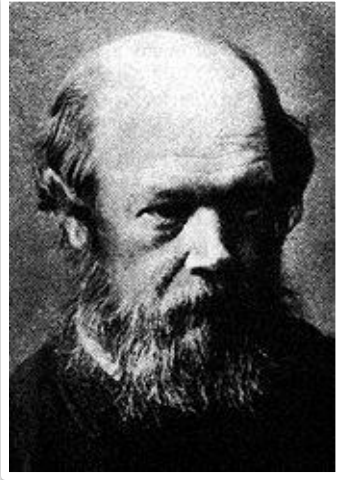
nus trifoli

Topologia geomètrica: (teoria de nusos)

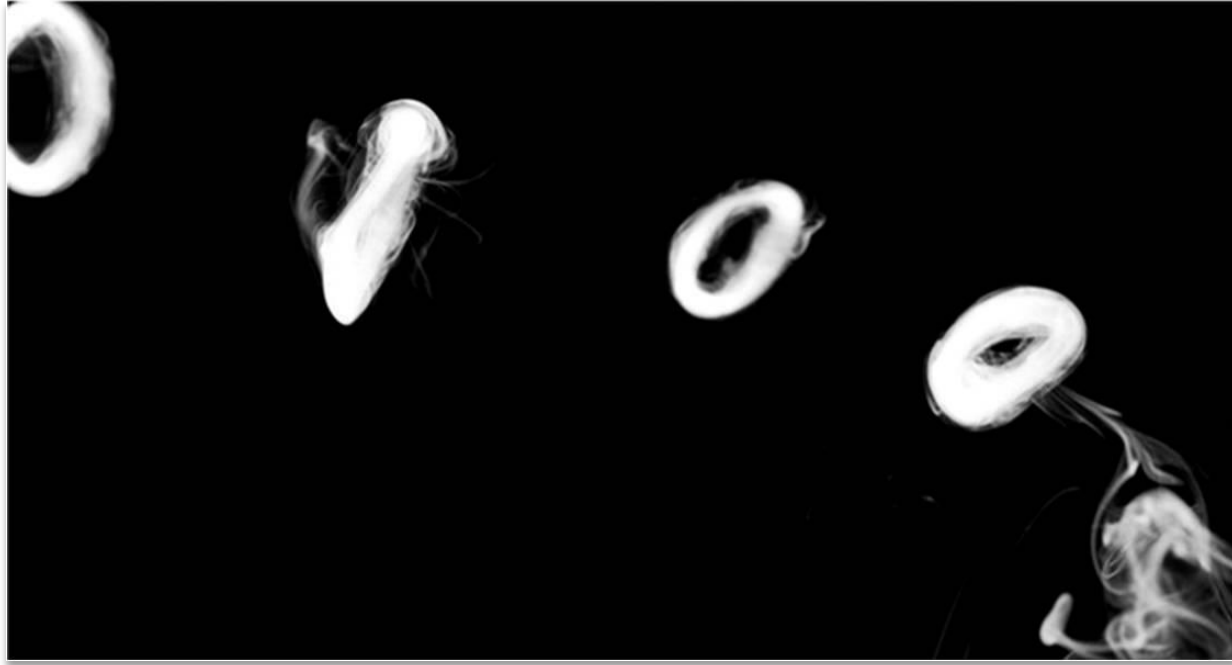
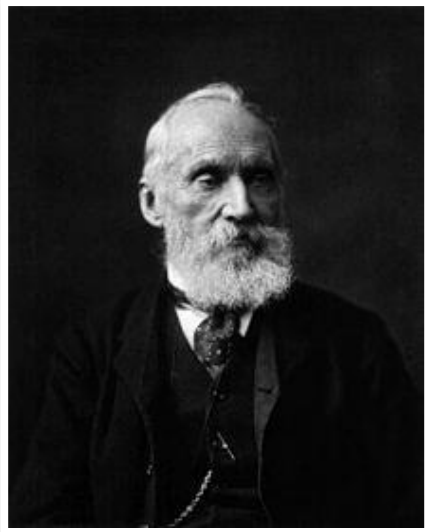


Primers encontres: topologia i física

Segle XIX:
Peter Guthrie Tait



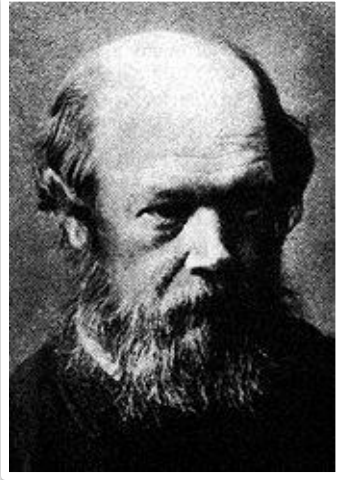
William Thomson
(Lord Kelvin)



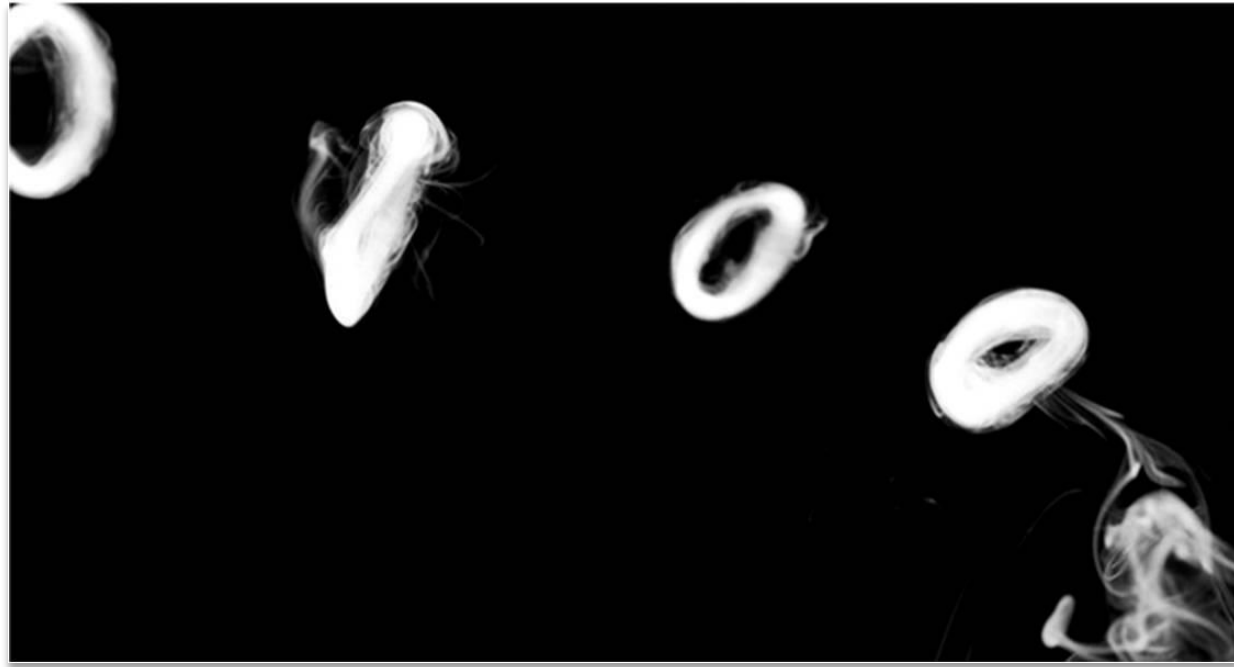
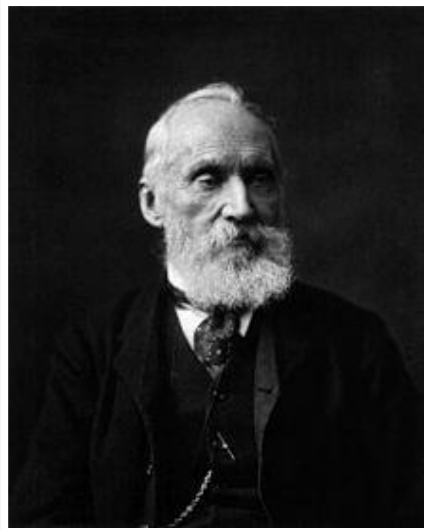
estabilitat dels anells de fum

Primers encontres: topologia i física

Segle XIX:
Peter Guthrie Tait



William Thomson
(Lord Kelvin)



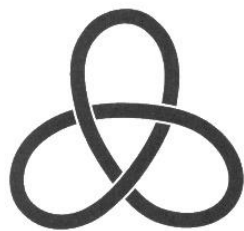
estabilitat dels anells de fum

Podria ser que la forma més bàsica de la
materia siguin nusos permanents d'eter amb
moviment de **vòrtex**?

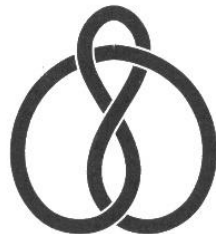
Primers encontres: topologia i física

1867: William Thomson
àtoms = nusos d'eter

Va inspirar al matemàtic
Tait a fer una classificació de nusos



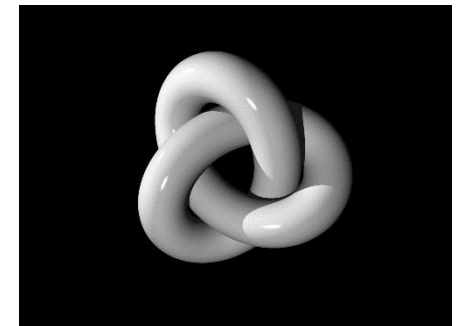
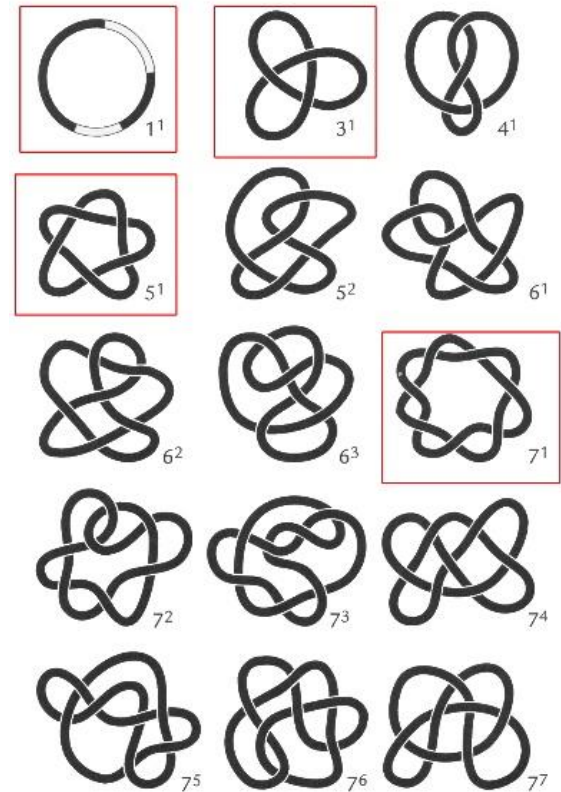
Carbon



Oxygen

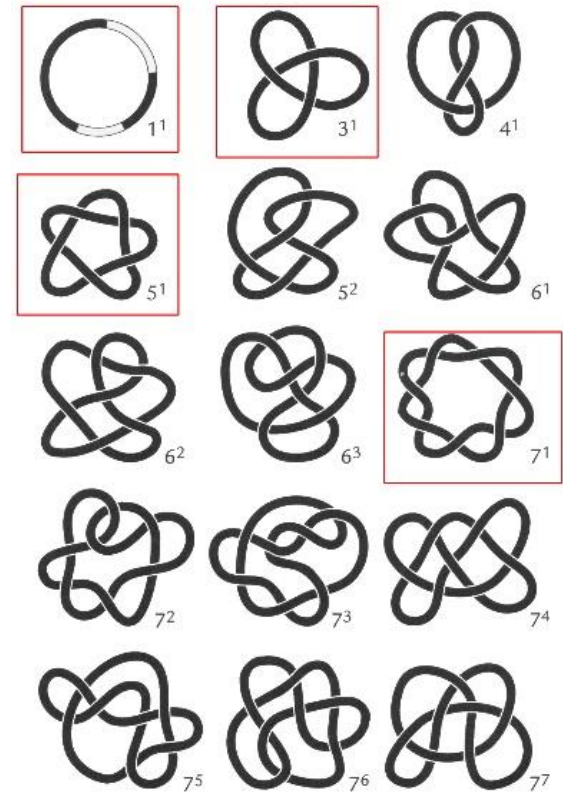
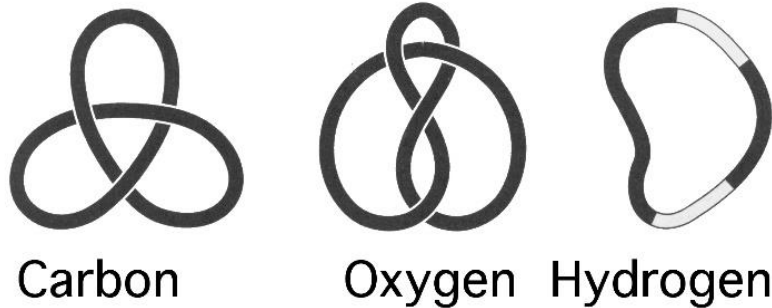


Hydrogen



1867: William Thomson
àtoms = nusos d'eter

Va inspirar al matemàtic
Tait a fer una classificació de nusos



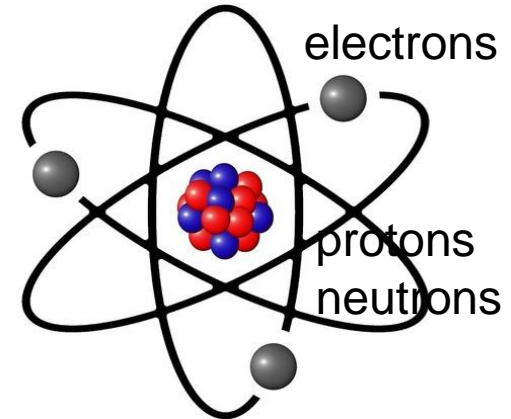
1887 Experiment Michelson-Morley → INEXISTÈNCIA DE L'ETER !!

Segle XX: Naixement de la física quàntica

Descriu el món microscòpic (10^{-8} cm)

Àtom de Bohr

Àtom



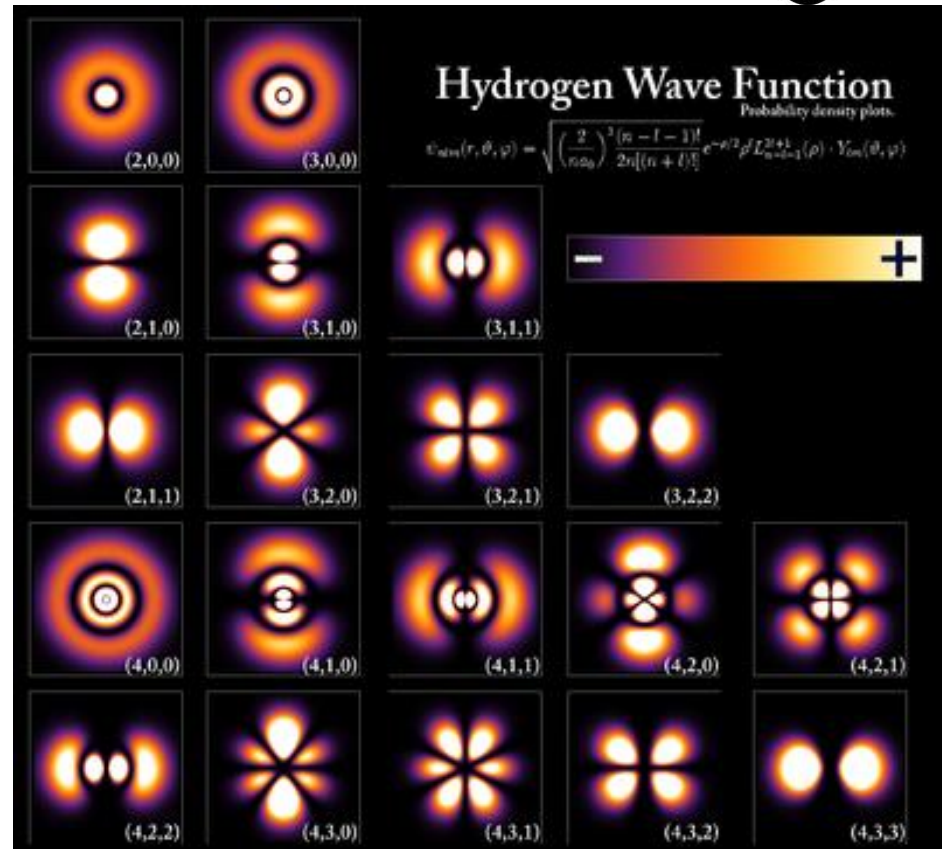
Funció d'ona de l'electró

$$\Psi(\mathbf{r}, t)$$

Equació de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = H\Psi(\mathbf{r}, t)$$

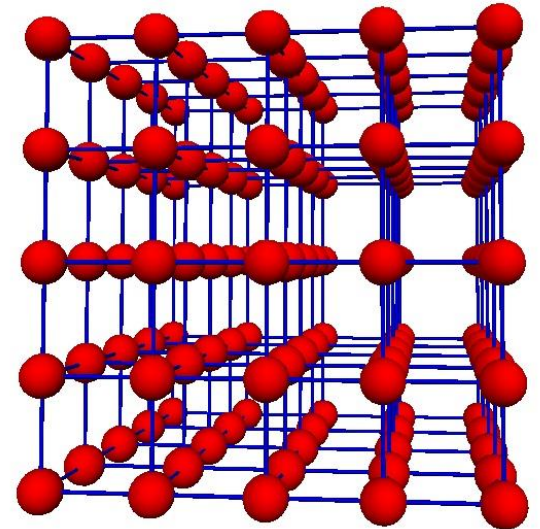
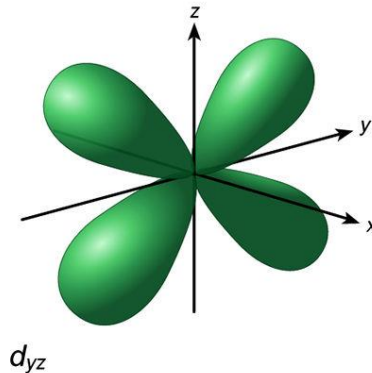
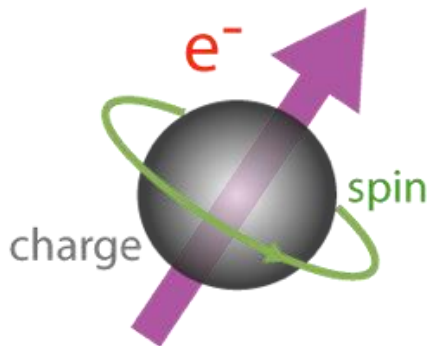
$$\left| \Psi(\mathbf{r}, t) \right|^2$$



Segle XX: Naixement de la física quàntica

Món microscòpic (10^{-8} cm)

- Sistema d'electrons interactionant:
 10^{23} electrons en 1cm^3
- Acció simultànea de:



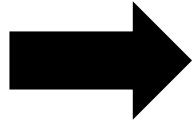
⇒ ***Transicions de fase***

More is different, P.W. Anderson, Science **177**, 393 (1972)

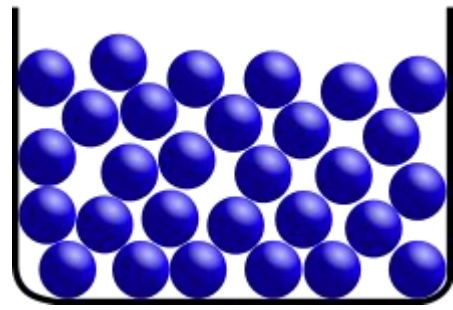
líquid



sòlid



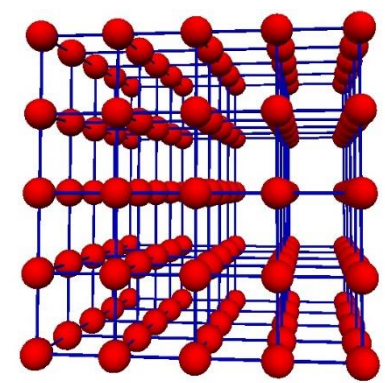
Reducció
Temperatura



Àtoms *desordenats*



simetria de
translació

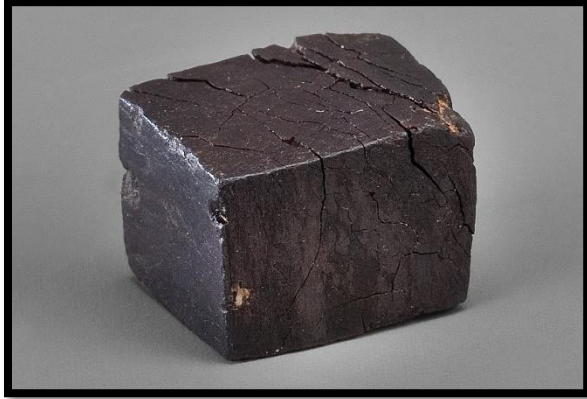


Àtoms *ordenats*

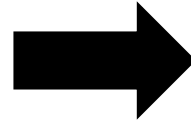
Transicions de fase: paramagnet → ferromagnet

(Teoria de Landau de transicions de fase 1937)

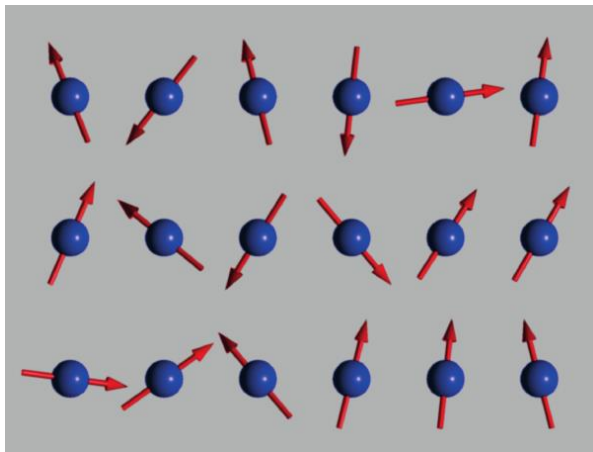
paramagnet



ferromagnet



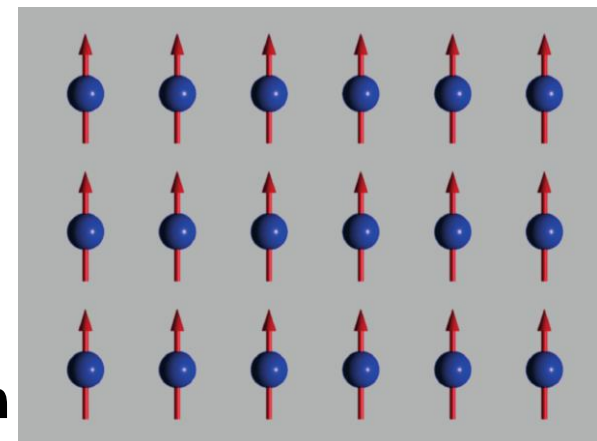
Reducció
Temperatura



spins *desordenats*



simetria de
rotació de spin



spins *ordenats*

Paràmetre d'ordre = magnetització

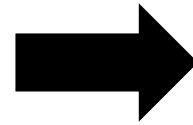
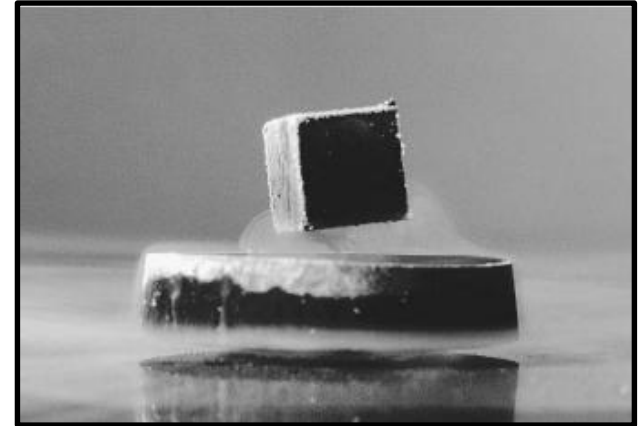
Transicions de fase: metall \rightarrow superconductor

(Teoria de Landau de transicions de fase 1937)

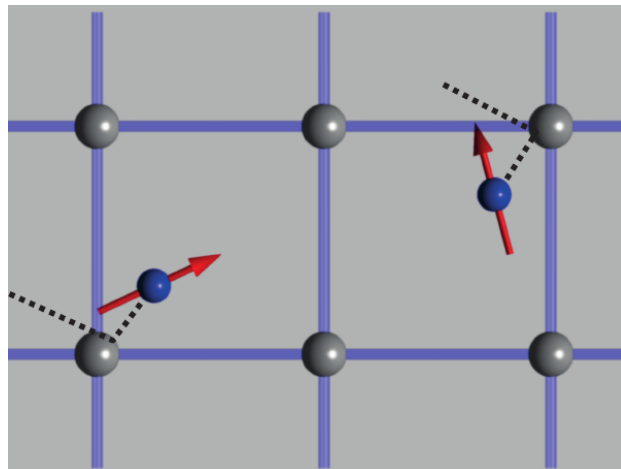
metall



superconductor



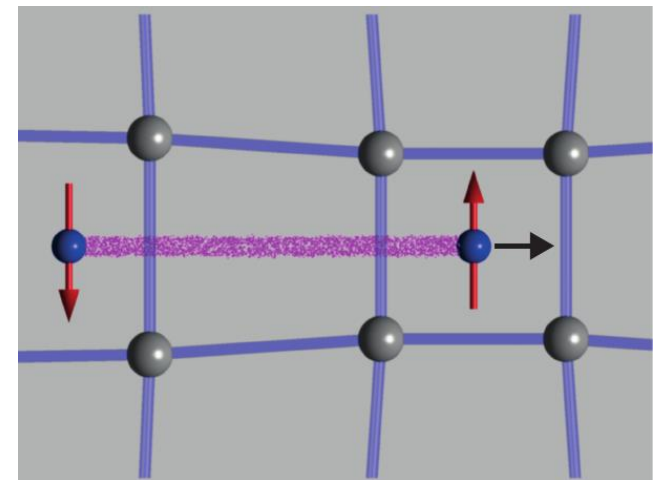
Reducció
Temperatura



Moviment *desordenat* d'electrons

Formació de
parelles de
Cooper

BCS



Moviment *ordenat* d'electrons

Paràmetre d'ordre= funció d'ona de la superconductivitat

1930: R. Peierls → en 2D el moviment tèrmic dels àtoms impedeix que el sistema s'ordini

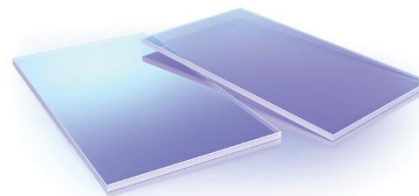
1966: N.D. Mermin, H. Wagner → van demostrar que en 2D magnetisme no es realitzable

1967: P. Hohenberg → va demostrar que en 2D superconductivitat i superfluidesa no poden existir

Problema:

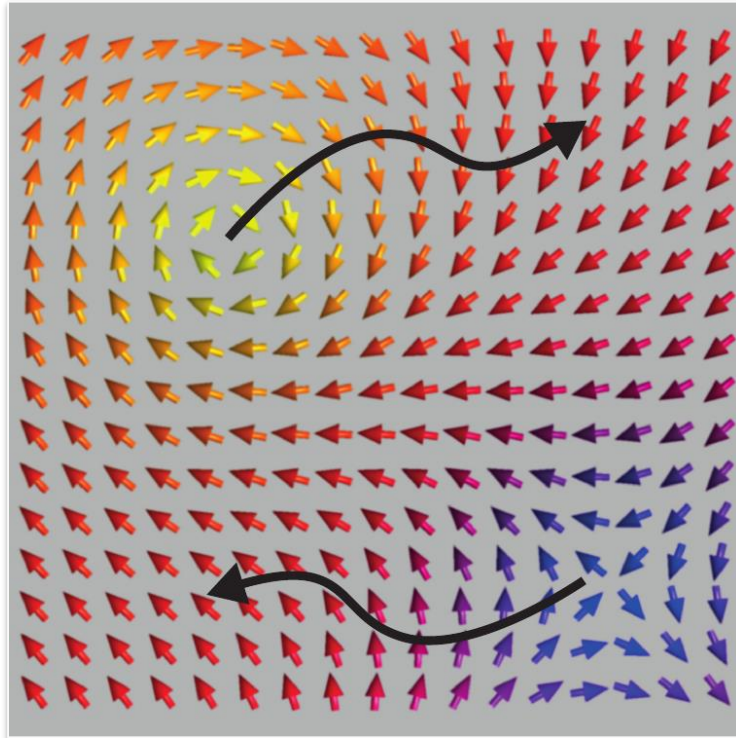
Observació experimental de superfluiditat en pel·lícules fines (2D) d'heli líquid

??

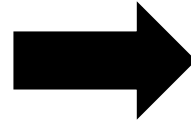


Kosterlitz i Thouless

J. Phys. C 5, L124 (1972); 6, 1181 (1973), Berezinskii (1972)



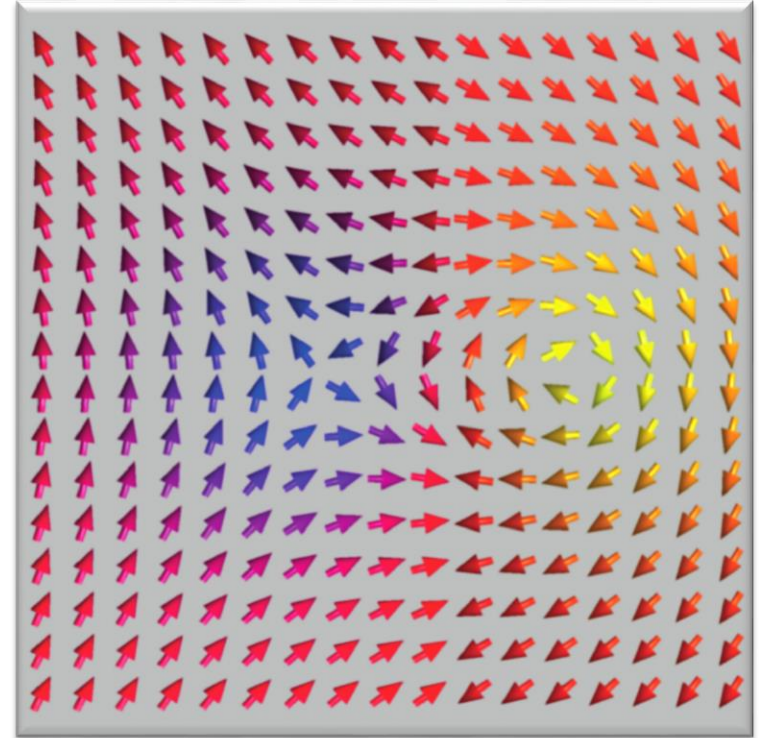
Vòrtex – antivòrtex *deslligats*



Reducció
Temperatura

Canvi de
topologia

BKT



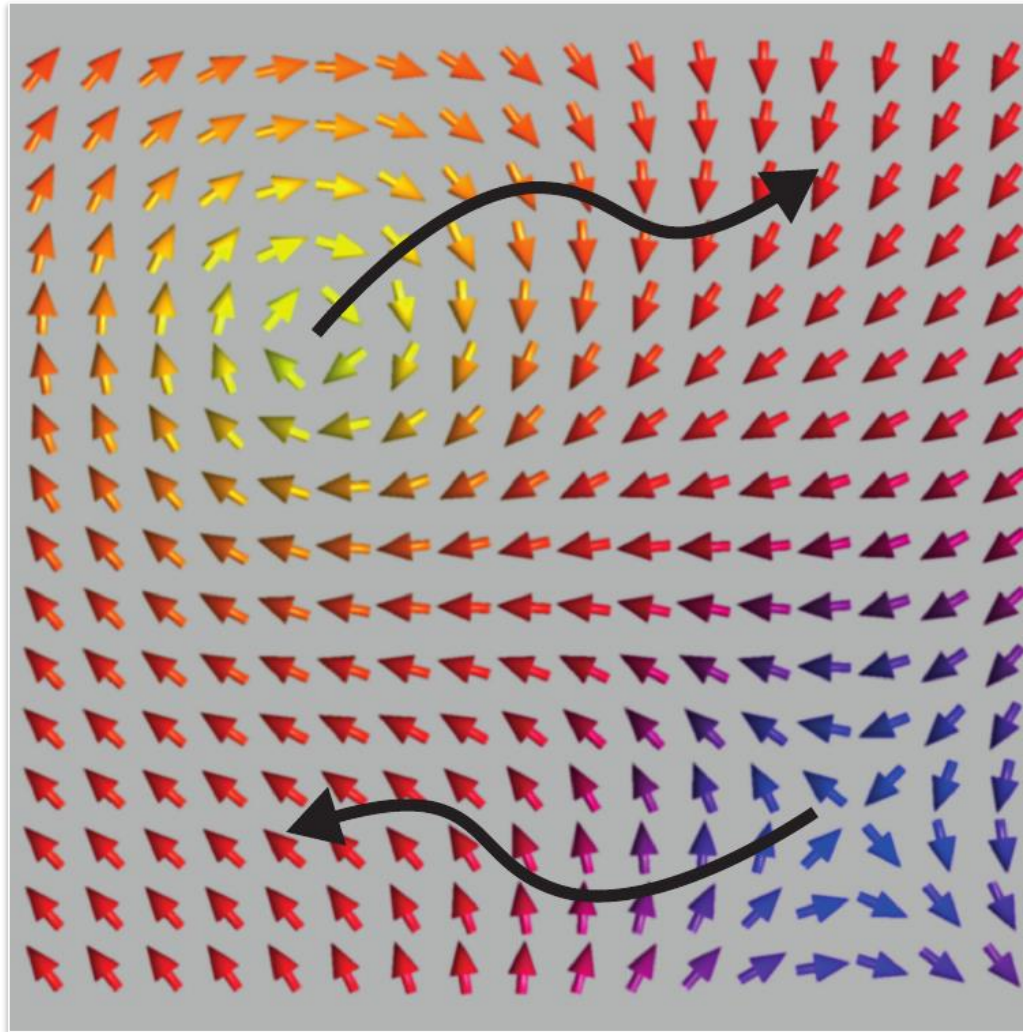
Vòrtex – antivòrtex *lligats*

en sistemes 2D, **defectes topològics (vòrtex)** poden conduir a una transició de fase que no esta acompanyada per un canvi de simetria del sistema → **NOU ESTAT DE MATERIA**

Vòrtex-antivòrtex

vòrtex:
 $G=1$

Circulació 2π



Circulació -2π

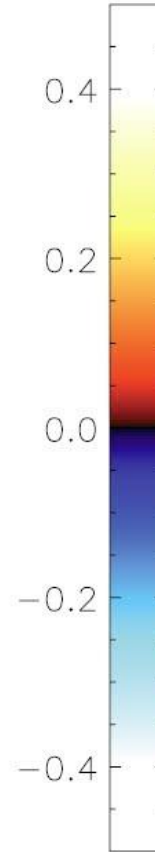
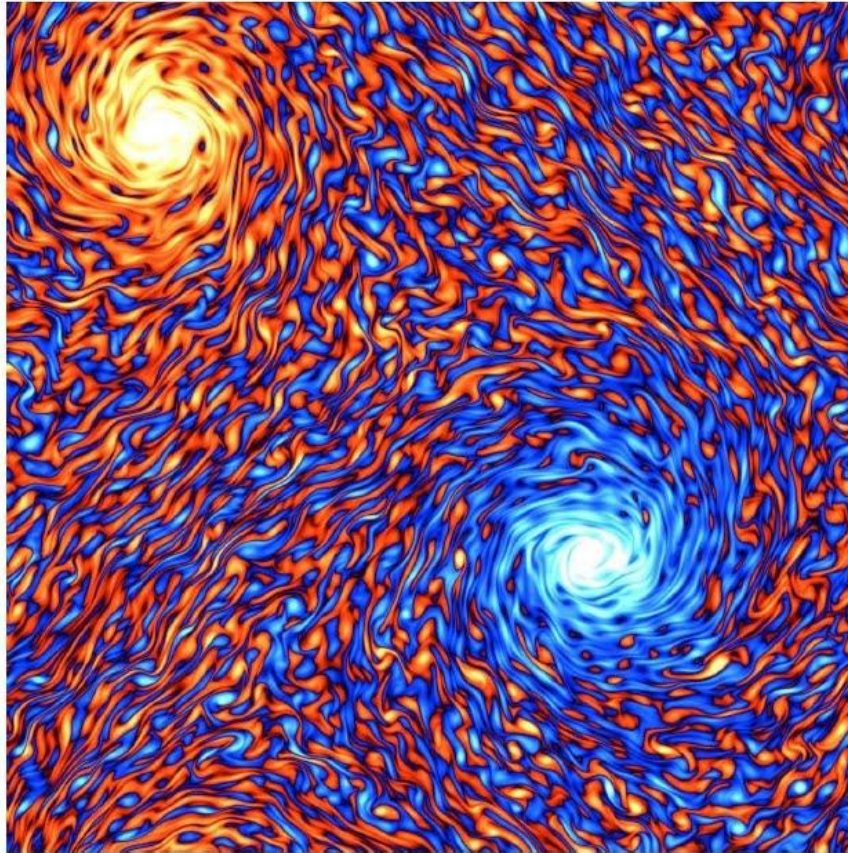
antivòrtex:
 $G=-1$

es impossible convertir un **vòrtex** en un **antivòrtex** mitjançant una deformació contínua, però es poden aparellar **parella $G=0$**

Vòrtex-antivòrtex

vortex:
 $G=1$

Circulació 2π

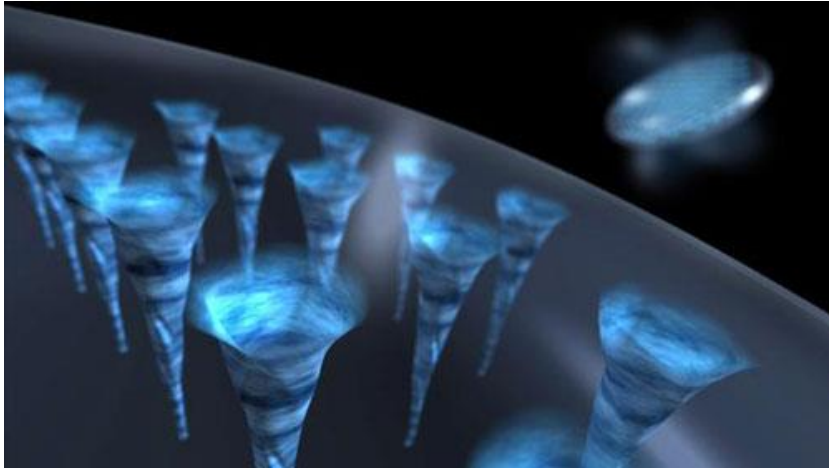


Circulació -2π

antivortex:
 $G=-1$

es impossible convertir un **vòrtex** en un **antivòrtex** mitjançant una deformació contínua, però es poden aparellar **parella $G=0$**

$T = 4\text{K}$
 -268Celsius

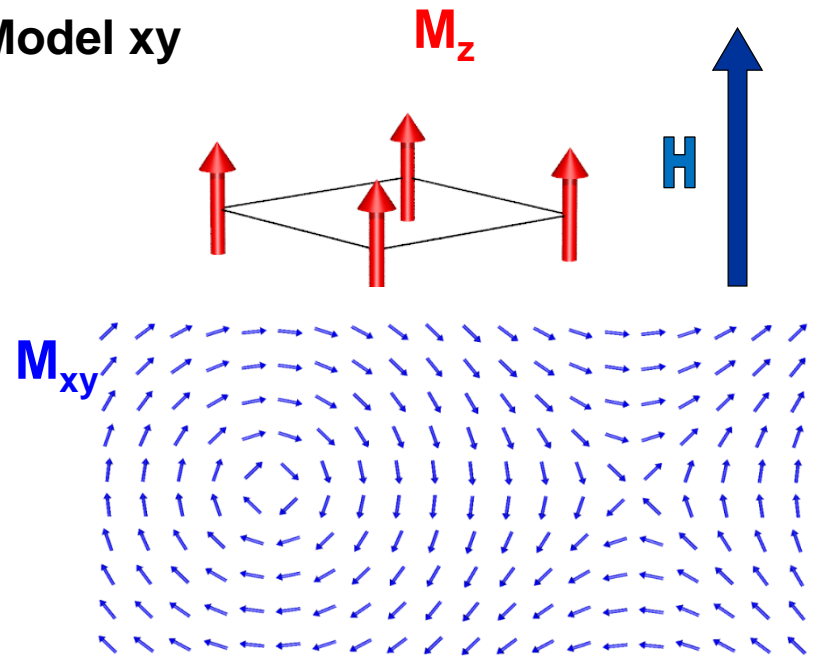


4He superfluid vòrtex

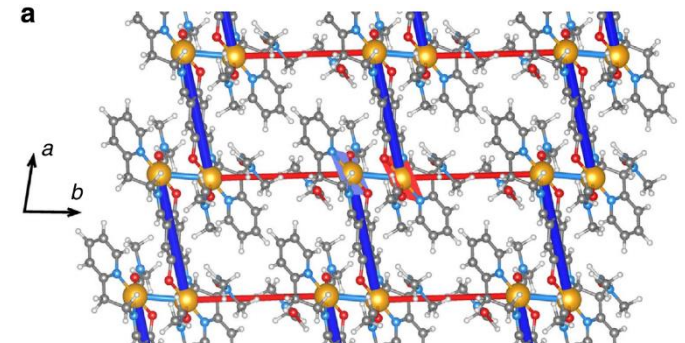
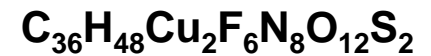
Gomez et al. Science, 345 906 (2014)

transició (field-induced) BKT

Model xy



$T = 50\text{mK}$



Tutsch et al.

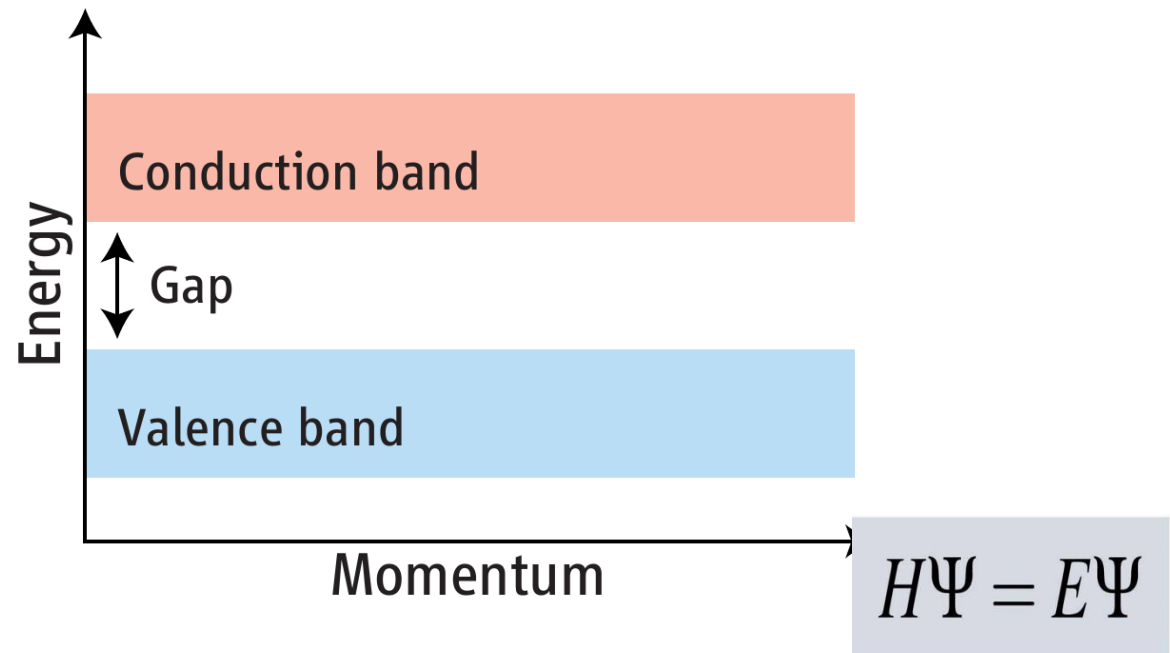
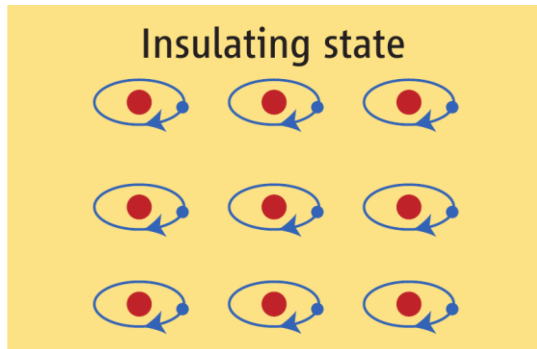
Nature Comm. 5, 5169 (2014)

Passem a les propietats de transport d'electrons (funció d'ona dels electrons)

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} u_{\vec{k}}(\vec{r})$$

La característica que defineix aïllants i conductors és la seva estructura de bandes electrònica

Aïllant:



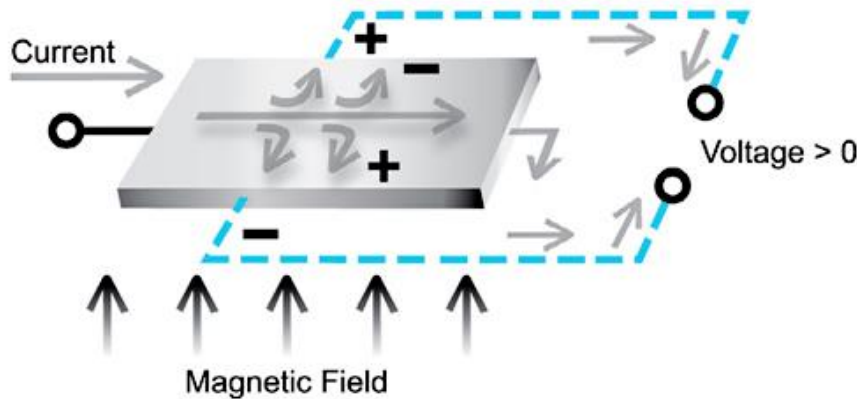
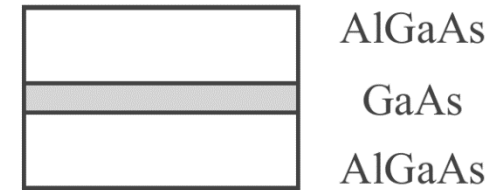
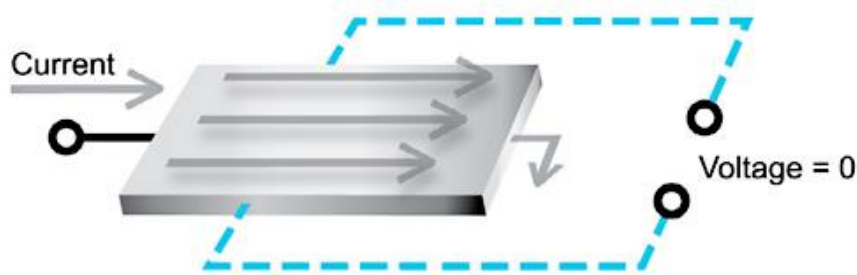
A física quàntica:

geometria \rightarrow energia

Deformations locals \rightarrow canvis adiabàtics del Hamiltonià

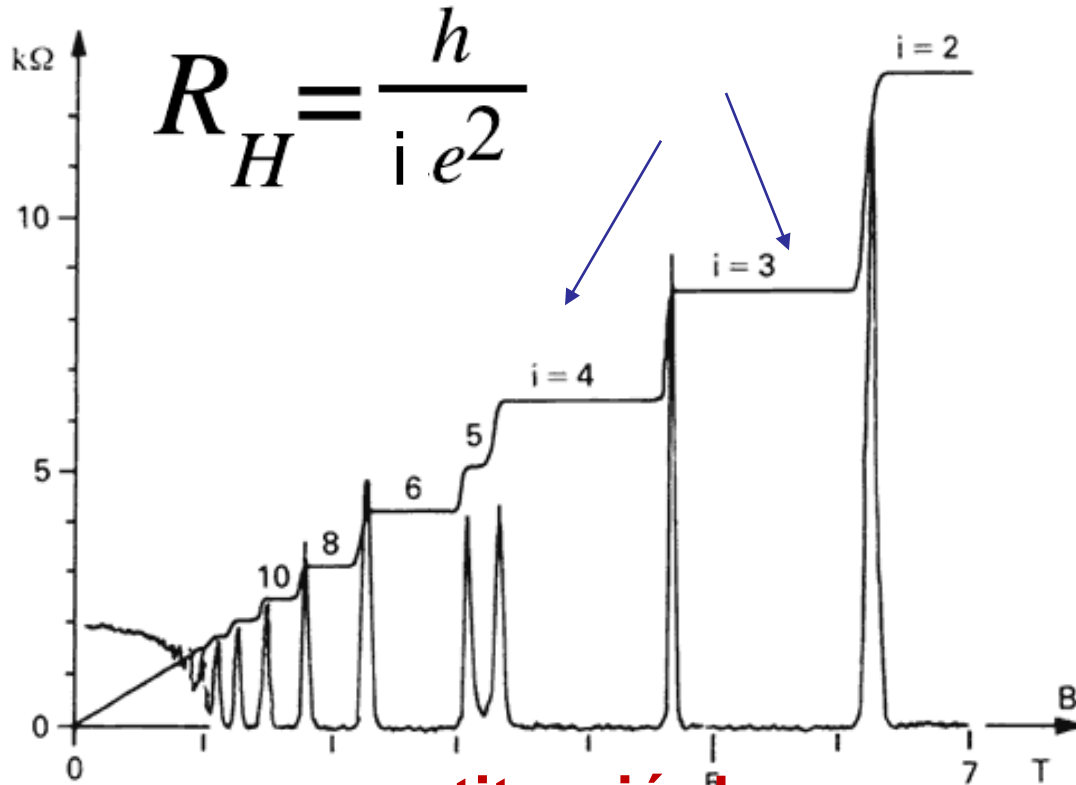
Efecte Hall

Klaus
von Klitzing 1980



Thouless, Kohmoto, Nightingale, Nijs PRL 49, 405 (1982)

Efecte Hall Quàntic

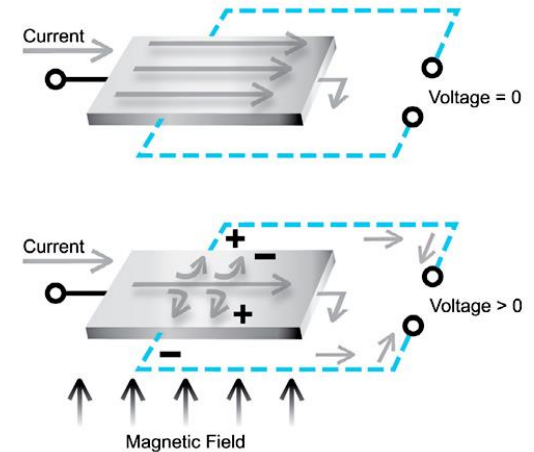
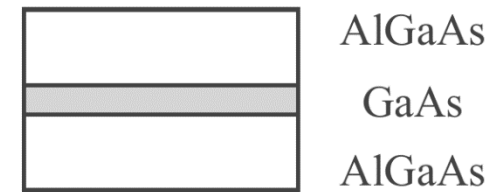


$$R_H = \frac{h}{i e^2}$$

quantització de la resistivitat !

i : índex topològic de l'estructura de bandes dels electrons

Premi Nobel von Klitzing 1985



Propietats topològiques de la funció d'ona

Integrals sobre propietats geomètriques locals defineixen la **topologia global**

$$\int d^2 \mathbf{r} (\text{Gaussian curvature}) = 4\pi(1 - \text{genus})$$

Quan \mathbf{k} es transporta al voltant d'un loop tancat,

La funció d'ona $|u_m(\mathbf{k})\rangle$

adquireix una fase (fase de Berry) donada per la integral de línia

$$\mathcal{A}_m = i \langle u_m | \nabla_{\mathbf{k}} | u_m \rangle$$

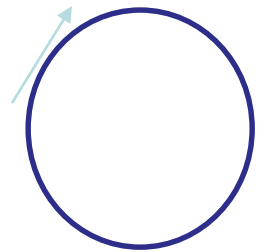
$$\mathcal{F}_m = \nabla \times \mathcal{A}_m$$

$$n_m = \frac{1}{2\pi} \int d^2 \mathbf{k} \mathcal{F}_m$$

integral de superfície
del flux de Berry

Índex de Chern

$$n = \sum_{m=1}^N n_m$$



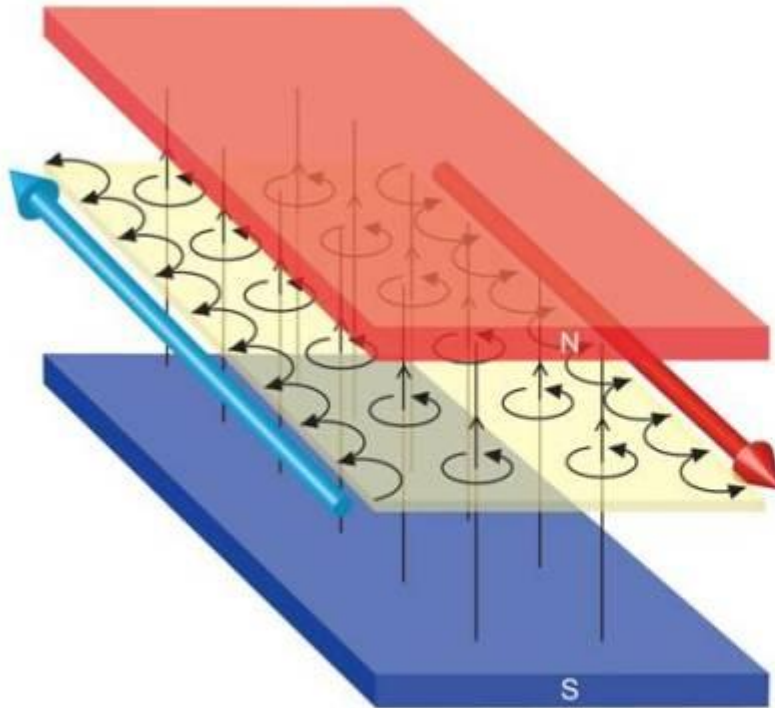
Propietat GLOBAL

Índex de circulació

L'existència dels **estats metal·lics a la vora** es una conseqüència de la natura topològica del QHE → protecció topològica

Efecte Hall Quàntic

$$R_H = \frac{h}{ie^2}$$



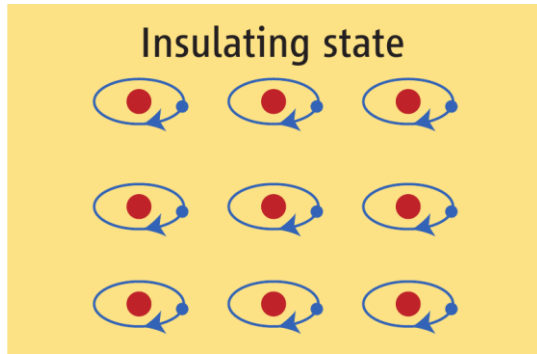
Aïllant a l'interior, metal·lic a les vores

Edge states

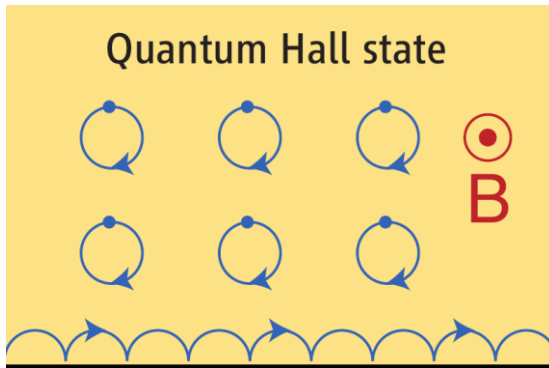
$C=1/i$ numero de Chern

i : índex topològic de l'**estructura de bandes dels electrons**

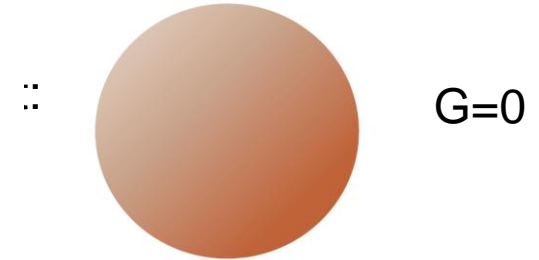
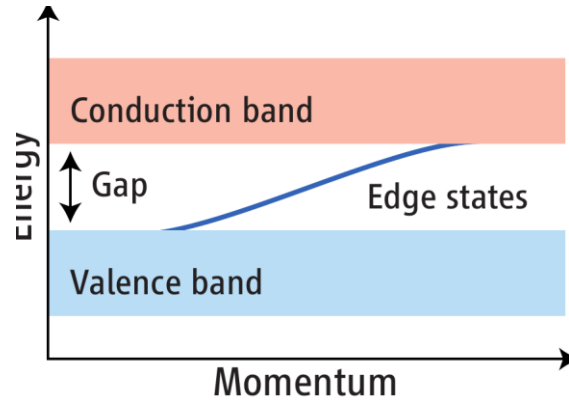
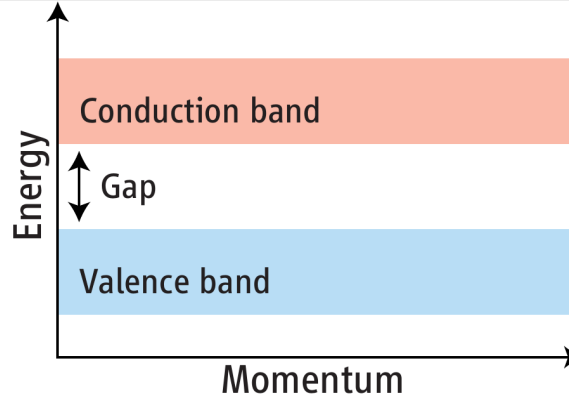
Efecte Hall Quàntic



Insulating state



Quantum Hall state



G=0



G=1

Correspondència Bulk-boundary →
L'estructura topològica del cristall ↔
Presència de estats de vora

Kane, Mele
Science 314, 1692 (2006)

Hassan, Kane
Rev. Mod. Phys. (2010)

La topologia dels estats quàntics es conserva sempre i quan no es tenquin els gaps d'energia.

Thouless, Kosterlitz i Haldane: pioners en utilitzar el llenguatge de la topologia per descriure el món quàntic

Es possible observar l'efecte Hall quàntic sense cap magnetic exterior?

Kane, Mele PRL 95, 226801 (2005)

Bernevig, Zhang PRL 96, 106802 (2006)

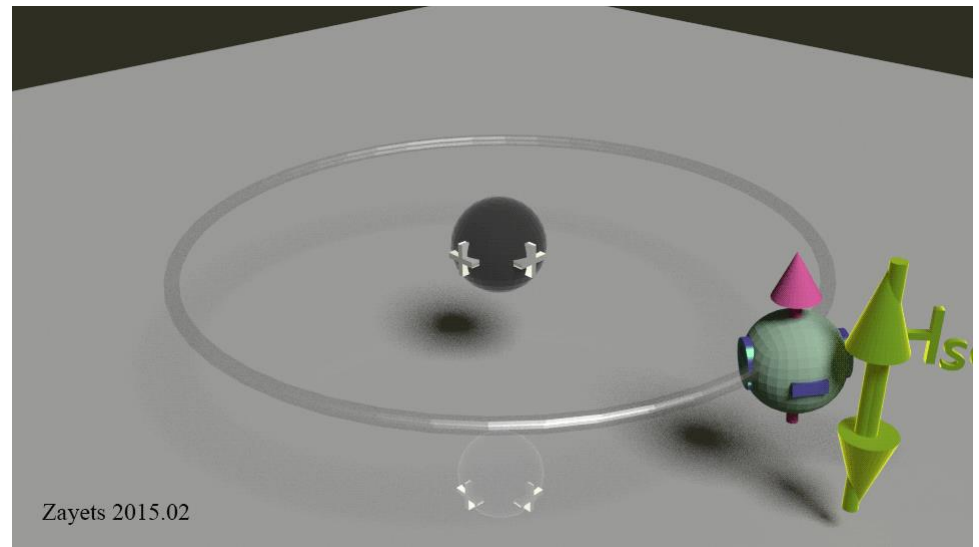
Thouless, Kosterlitz i Haldane han revolucionat el món de la matèria quàntica

Kane, Mele PRL 95, 226801 (2005)

Bernevig, Zhang PRL 96, 106802 (2006)

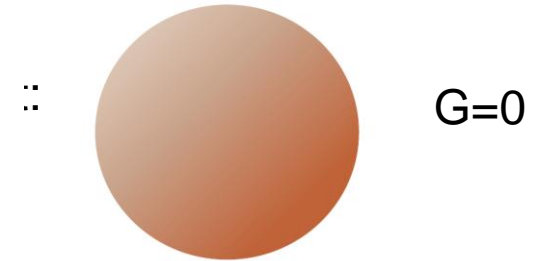
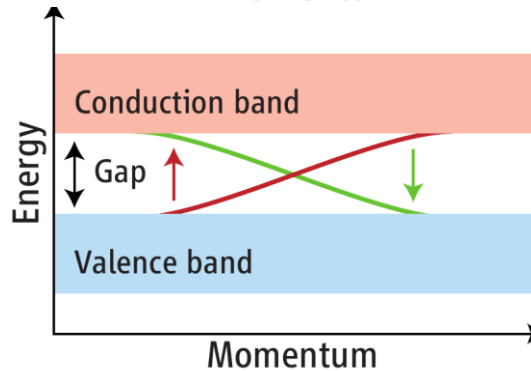
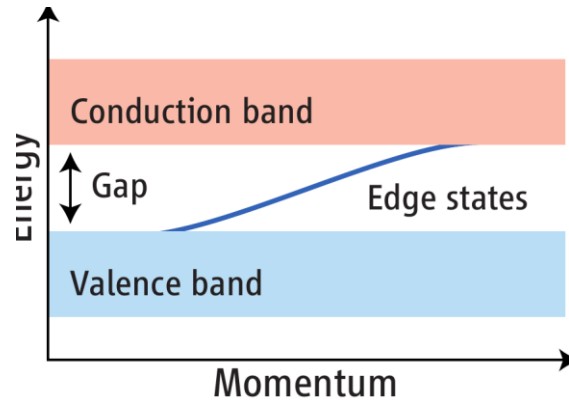
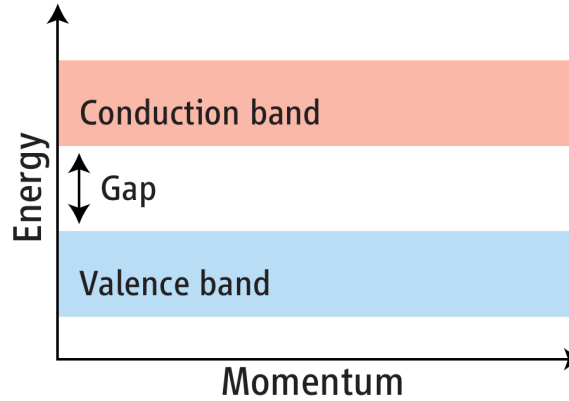
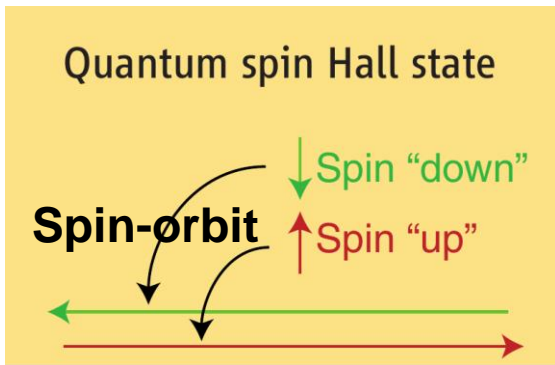
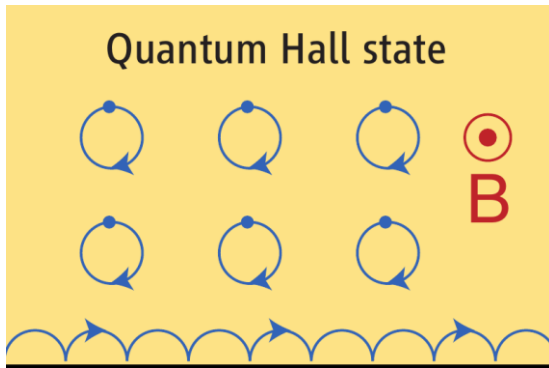
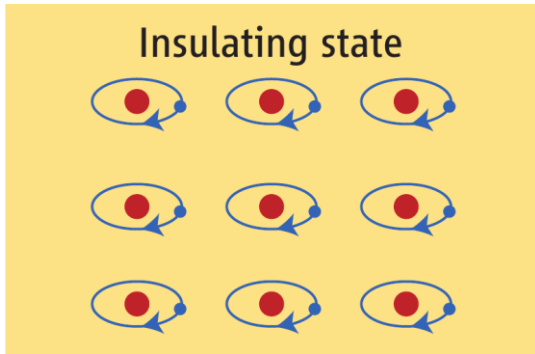
Efecte Hall quàntic sense camp magnètic exterior

Acoblament spin-orbit



aïllant a l'interior/ metal·lic a la superfície
 protegit per la topologia del sistema

Aïllants topològics

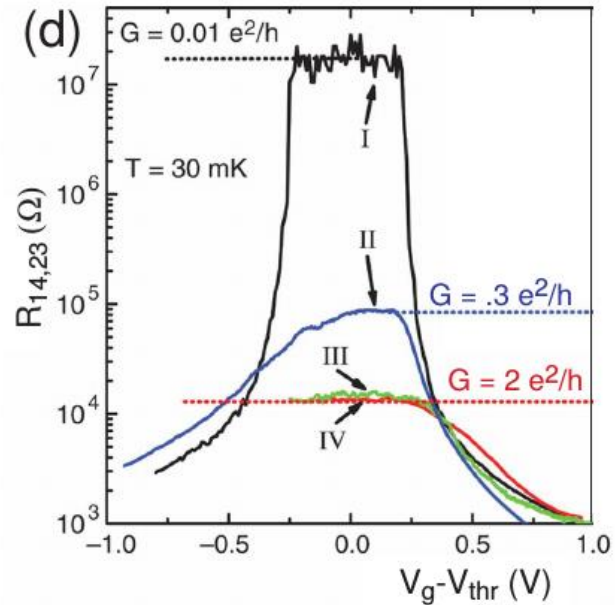
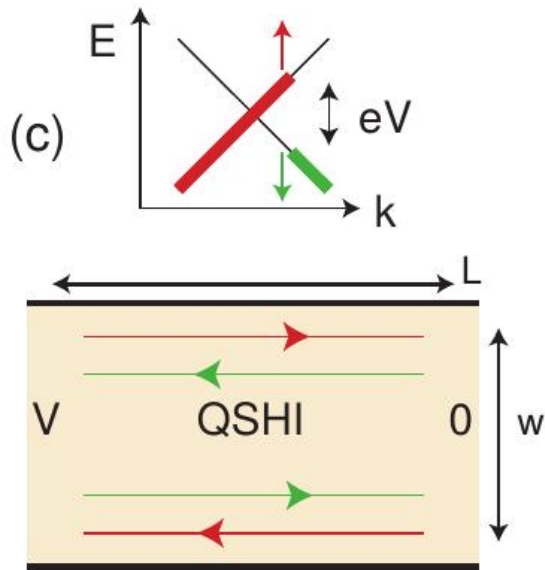
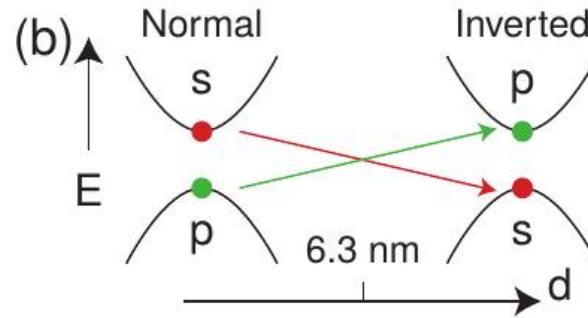
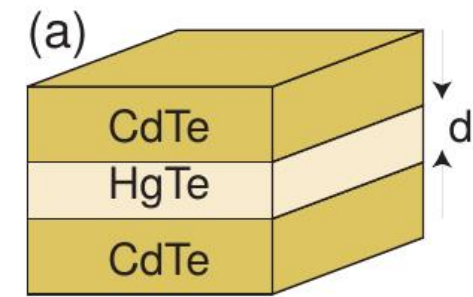


Kane, Mele
 Science 314, 1692 (2006)

Experiment:

2D- CdTe/HgTe
 (Molenkamp, Würzburg)

La topologia dels estats quàntics es conserva sempre i quan no es tenquin els gaps d'energia.



(Molenkamp, Würzburg)

König et al.
Science 318, 766 (2007)

Hassan, Kane
Rev. Mod. Phys. (2010)

ordre topològic



```
graph TD; A[ordre topològic] --> B[Inherent]; A --> C[protegit per simetria];
```

Inherent

- les fases tenen gap i
- **sense tancar el gap**-
no es possible transformar
les fases via *qualsevol* cami

**sistemes de Hall quantic
liquids de spin**

protegit per simetria

- les fases tenen gap i
- **sense tancar el gap**-
no es possible transformar
les fases via camins que
conservin simetria

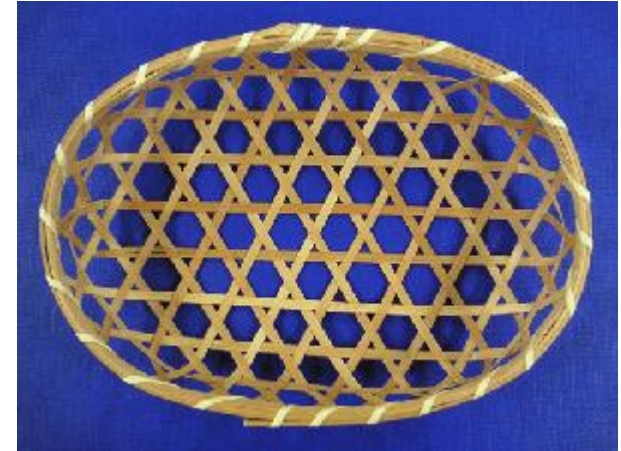
Aïllants topologics

Diseny d'aïllants topològics

Starting system: **Herbertsmithite**
 $\text{ZnCu}_3(\text{OH})_6\text{Cl}_2$

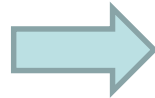


xarxa Kagome de spins 1/2 de Cu

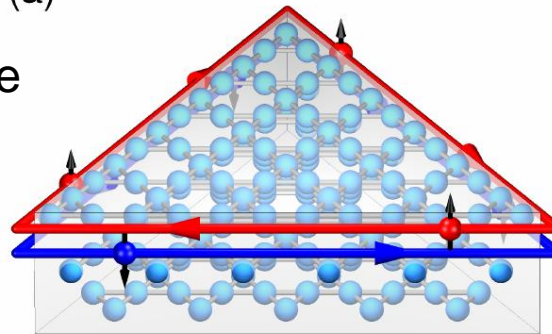


Acoblament spin-orbita del coure

Dopant el sistema

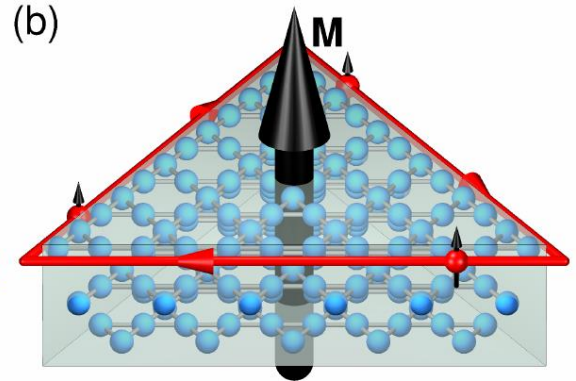


(a)



quantum spin Hall effect

(b)



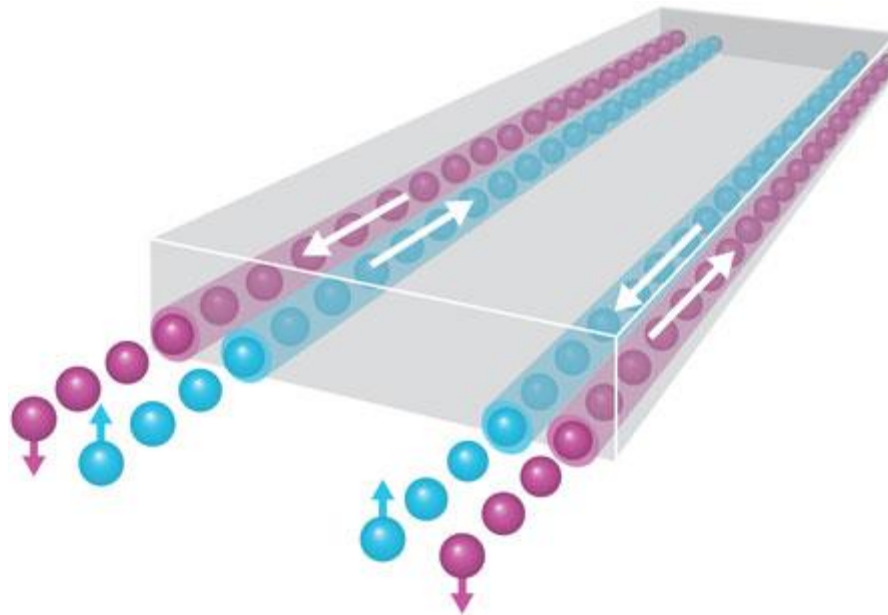
quantum anomalous Hall effect

Mazin et al. Nature Comm. (2014)

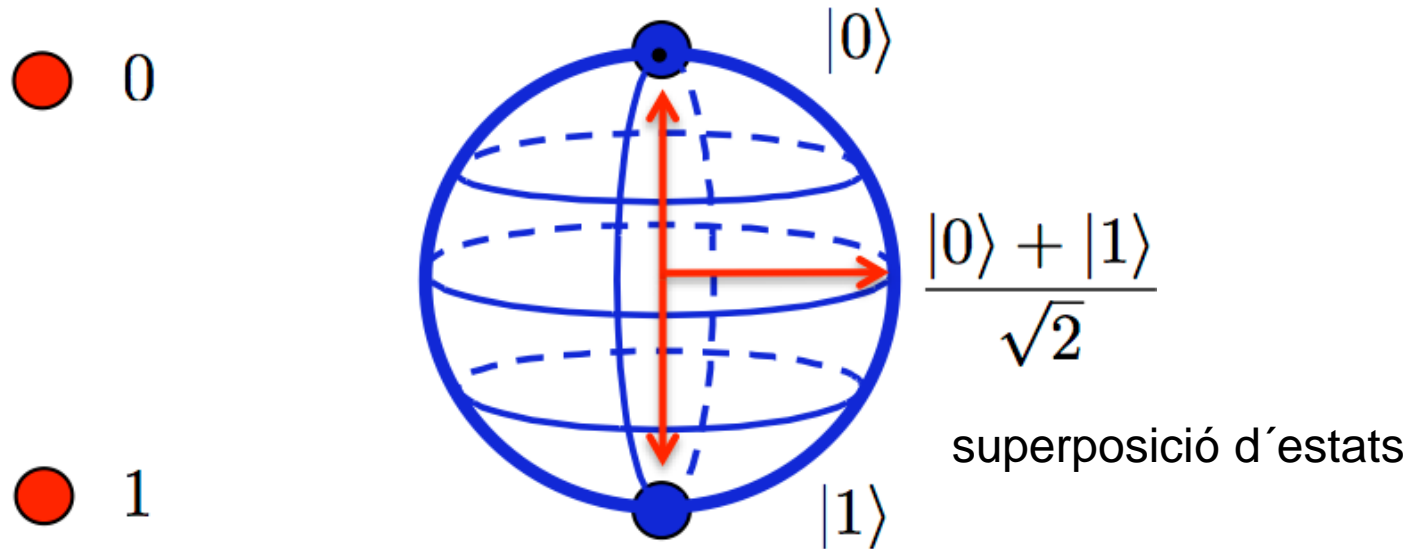
Guterding et al. Sci. Rep. 6, 25988 (2016)

Zn → Ga

Zn → Na



Spintrònica a temperatures ambient



Classical Bit

Qubit

- operacions utilitzant **qubits** en comptes de **bits**
- Fabricació difícil: p.e. partícules atrapades (àtoms, ions electrons) on la superposició es molt **fràgil** → **ERRORS**

(Alexei Kitaev)

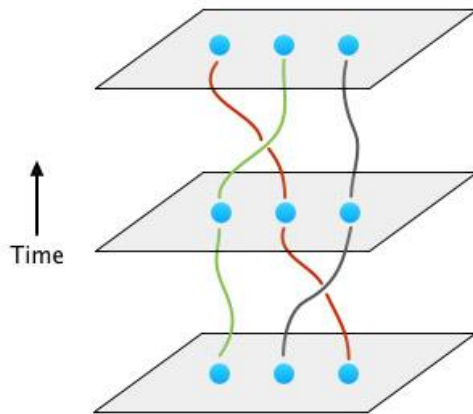
teoria de nusos

Idea:

utilitzar les propietats topològiques de la matèria

Excitacions en un sistema d'electrons en 2 dimensions: anyons

Qubit: parella d'anyons



**operació no es modificada per l'entorn →
protegida per la topologia**

ordinadors topològics quàntics

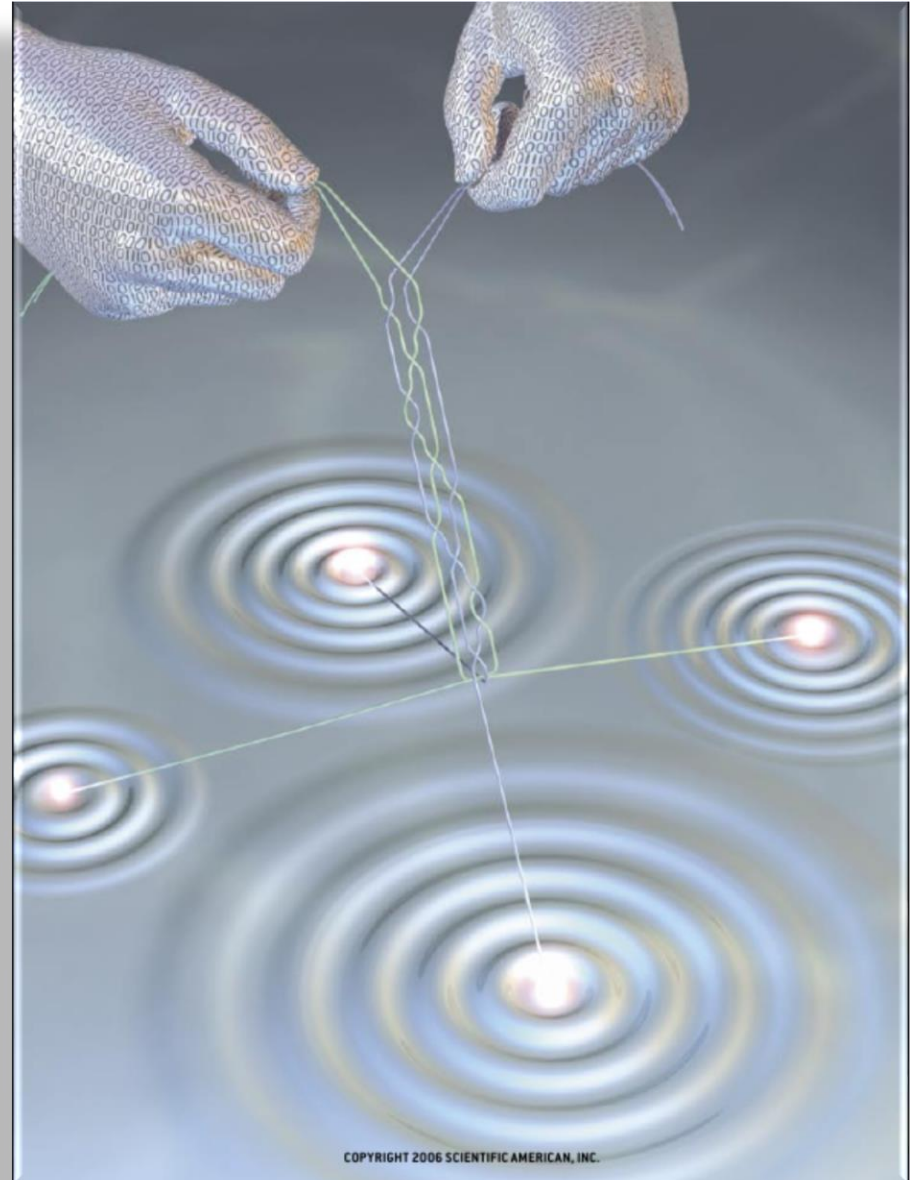
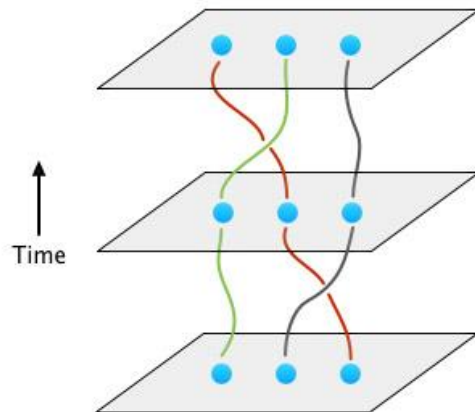
(Alexei Kitaev)

Idea:

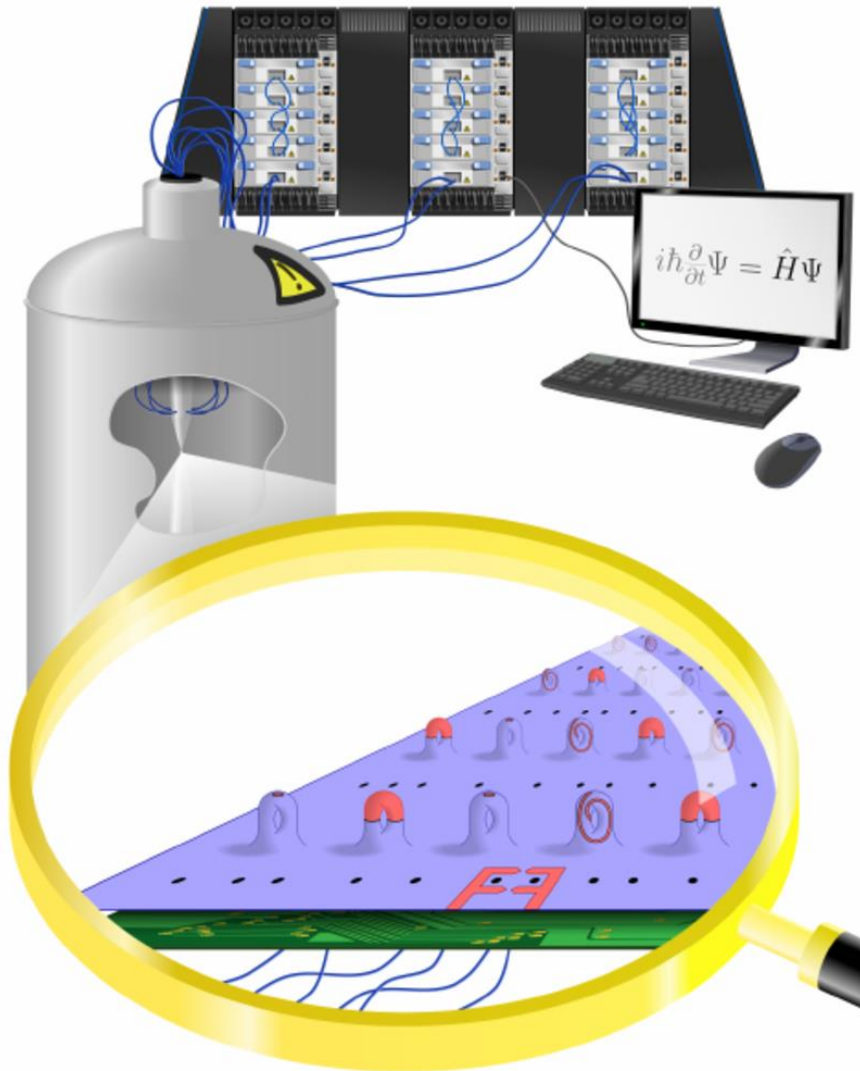
utilitzar les propietats topològiques de la matèria

Excitacions en un sistema d'electrons
En 2 dimensions: anyons

Qubit: parella d'anyons



Ordinador topològic quàntic



The gates and devices used to perform DTC operations, quasiparticle braiding, and topological charge measurement are all controlled by a classical computer.

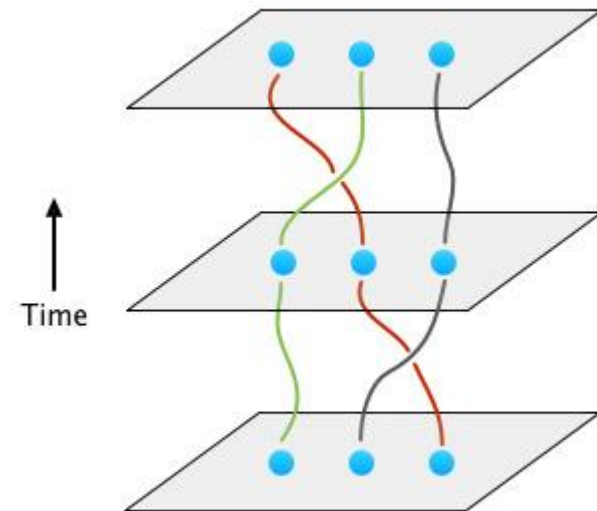
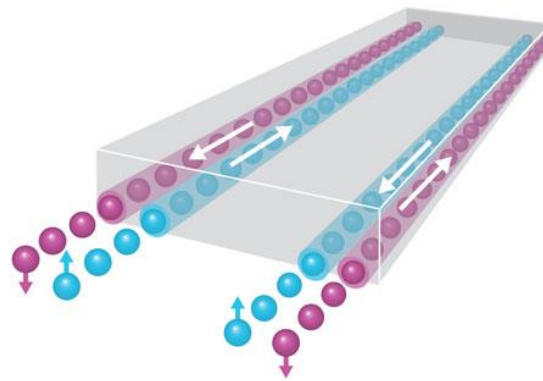
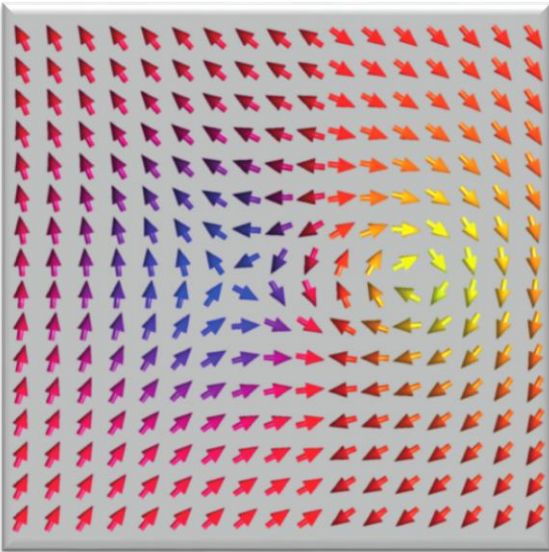
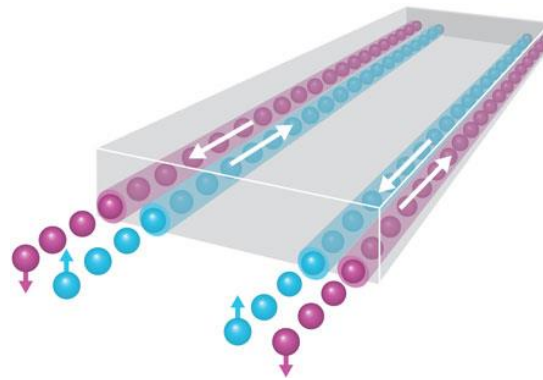
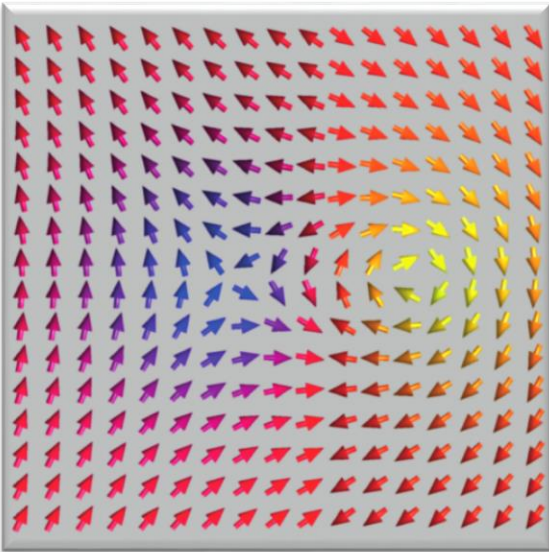


Figure:
Research gate

Topologia essencial per descriure el món quàntic en 2 dimensions:



Topologia essencial per descriure el món quàntic en 2 dimensions:



Moltes gràcies!