Problema P1 (obligatori)

Un cos a temperatura T situat en un ambient a temperatura T_A ($T_A < T$) es refreda a un ritme proporcional a la diferència de temperatures d'acord amb l'equació diferencial:

$$\frac{dT}{dt} = -K(T - T_A) \qquad [1]$$

on t representa el temps i K és una constant que indica el ritme de refredament. Integrant aquesta equació es pot deduir la relació entre la temperatura T del cos a l'instant t i la temperatura T_0 a l'instant inicial $t = 0$:

$$T = T_A + (T_0 - T_A)e^{-Kt} \qquad [2]$$

A) Apliqueu aquesta equació al següent cas pràctic:

Un malalt que es troba en una habitació a una temperatura ambient de 21ºC utilitza un termòmetre de mercuri per conèixer la temperatura del seu cos, la qual resulta ser de 37.8ºC. Després deixa refredar el termòmetre en contacte amb l'ambient.

i. Si 15 minuts després de fer la mesura la temperatura del termòmetre és de 36.5º, quant val la constant de refredament K del termòmetre?

ii. Quant temps haurà de passar per a que el termòmetre marqui 35ºC?

El malalt repeteix la mesura amb un altre termòmetre de constant de refredament $K = 5.3 \cdot 10^{-5}$ s^{-1} obtenint la mateixa temperatura del cos, 37.8ºC.

iii. Caldrà esperar més o menys temps que abans per a que aquest segon termòmetre marqui 36.5º ?

iv. D'acord amb l'equació [1], quan temps hauria de passar per que els termòmetres arribin a la temperatura ambient? Comenteu la resposta

B) Comproveu per derivació que l'equació [2] és solució de l'equació diferencial [1]

A) i. Aplicant l'expressió

$$T = T_A + (T_0 - T_A)e^{-Kt} \Rightarrow e^{-Kt} = \frac{T - T_A}{T_0 - T_A} \Rightarrow -Kt = \ln\frac{T - T_A}{T_0 - T_A} \Rightarrow K = -\frac{1}{t}\ln\frac{T - T_A}{T_0 - T_A}$$

Observis que com el cos es refreda des de T_0, la temperatura T sempre serà més petita i per tant el quocient $\frac{T - T_A}{T_0 - T_A}$ serà més petit que 1, el logaritme neperià negatiu i la constant K positiva.

En el nostre cas

$$K = -\frac{1}{t}\ln\frac{T - T_A}{T_0 - T_A} \Rightarrow K = -\frac{1}{900}\ln\frac{36.5 - 21}{37.8 - 21} = -\frac{1}{900}\ln\frac{15.5}{16.8} = 8.95 \cdot 10^{-5}\ \text{s}^{-1}$$

ii.

$$-Kt = \ln\frac{T-T_A}{T_0-T_A} \Rightarrow t = -\frac{1}{K}\ln\frac{T-T_A}{T_0-T_A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = -\frac{1}{8.95\cdot 10^{-5}}\ln\frac{35-21}{37.8-21} = -\frac{10^5}{8.95}\ln\frac{14}{16.8} = 2037.11\,\text{s} = 33.95\,\text{minuts}$$

iii. Com la constant $K = 5.3\cdot 10^{-5}$ s^{-1} és ara més petita que abans $K = 8.95\cdot 10^{-5}$ s^{-1}, el termòmetre es refreda més a poc a poc i per tant caldrà esperar més per tal que arribi a la mateixa temperatura.

iv. La pèrdua de temperatura es proporcional a la diferencia entre la temperatura del termòmetre i l'ambient; quan ambdues temperatures siguin similars, la diferencia serà molt petita i per tant la pèrdua de temperatura també; o sigui el termòmetre es refreda més a poc a poc conforme s'acosta a la temperatura ambient. Matemàticament triga un temps infinit per arribar a T_A, l'expressió [2] tendeix asintòticament a T_A

B)

$$\left.\begin{array}{r} T = T_A + (T_0 - T_A)e^{-Kt} \Rightarrow \dfrac{dT}{dt} = -K(T_0-T_A)e^{-Kt} \\ (T_0-T_A)e^{-Kt} = T - T_A \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{dT}{dt} = -K(T-T_A)$$

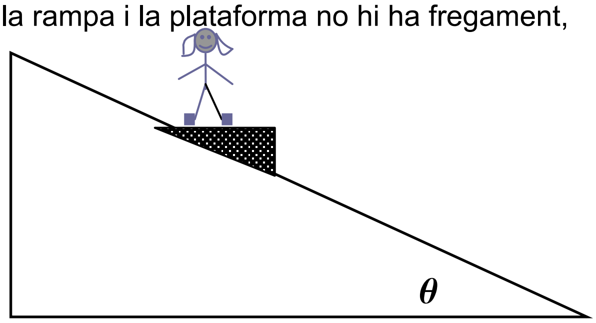
Problema P2

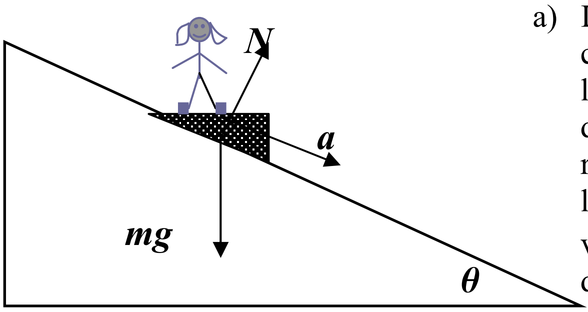
Una noia que es troba sobra una plataforma baixa una rampa que forma un angle θ amb l'horitzontal, tal com es veu a figura. La noia està sobre una bàscula situada a la part superior de la plataforma. Si la noia té una massa m i entre la rampa i la plataforma no hi ha fregament,

a) Quin serà el pes que marcarà la balança ?

b) Per a que la noia es mantingui sobre la plataforma, cal que hi hagi fregament entre els peus de la noia i la plataforma? Raona-ho. Si s'escau, calcula el coeficient de fregament mínim.

c) Si la noia volgués veure a la balança un pes igual a la meitat del seu, quin hauria de ser el valor de l'angle θ ?





a) La noia cau en un sistema accelerat, d'acceleració a en la direcció de la rampa. Aquesta acceleració la podrem trobar sumant vectorialment les dues forces, el pes i la força de reacció de la rampa que actuen sobre la noia. El primer val mg i la segona $N = mg\cos\theta$ i forma un angle θ amb la vertical dirigida cap amunt. La suma vectorial d'aquestes dues forces és $mg\sin\theta$ i per tant la noia cau amb una acceleració $g\sin\theta$.

La component vertical d'aquesta acceleració serà $g\sin^2\theta$

La bàscula només mesura les components verticals de la força/acceleració, per tant en lloc de mesurar mg mesurarà $mg - mg\sin^2\theta = mg\left(1-\sin^2\theta\right) = mg\cos^2\theta$

Noteu que si l'angle fos $\frac{\pi}{2}$, la bàscula mesuraria 0, caiguda lliure. Si l'angle fos 0º, horitzontal, la bàscula mesuraria mg, el pes de la noia.

b) L'acceleració de caiguda de la plataforma per la rampa també te una component horitzontal que val $g\sin\theta\cos\theta$. Si la noia no estès sotmesa a fregament amb la plataforma es quedaria enredera perquè no hi hauria cap manera de que anés seguint la plataforma.

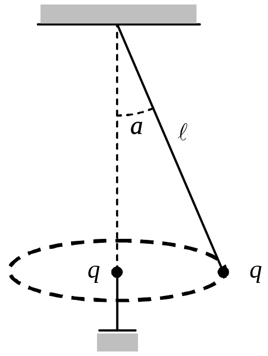
La força de fregament ha ser com a mínim igual a la força cap endavant $mg\sin\theta\cos\theta$. Per altre banda la força de fregament val $\mu mg\cos^2\theta$, on hem emprat el pes de la noia que veu la balança. Per tant el valor mínim de la constant de fregament és

$$\mu mg\cos^2\theta = mg\sin\theta\cos\theta \Rightarrow \mu = \tan\theta$$

c) Si la noia volgués veure a la balança un pes igual a la meitat del seu, l'angle θ hauria de complir la relació:

$$\frac{1}{2}mg = mg\cos^2\theta \Rightarrow \cos\theta = \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow \theta = 45^\circ = \frac{\pi}{4}\ \text{rad}$$

Problema P3

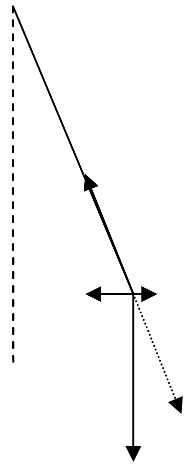


Una esfera molt petita, amb càrrega elèctrica positiva ***q*** i massa ***m***, està penjada d'un fil de longitud ***l***, i gira al voltant d'una altra esfera immòbil també carregada. Les dues càrregues són iguals. Vegeu la figura, on *a* és l'angle que forma el fil amb la vertical.

a) Trobeu el període de rotació de l'esfera.

b) Quina és la tensió del fil?

c) Com canviaria la resposta de l'apartat a) si la càrrega de l'esfera central valgués ***–q*** ? I si no estigues carregada?



a) Sobre la massa m hi actua el pes, vertical i cap avall, la força de repulsió electrostàtica entre les dues cargues, que és horitzontal en la direcció definida per les dues càrregues i cap a fora, i finament la tensió del fil T_f, que té la direcció del fil.

Per tal que la massa m pugui estar donant voltes al voltant de la càrrega central amb velocitat angular constant w, la suma d'aquestes tres forces ha de ser igual a la força centrípeta que produeix el moviment circular uniforme $F_c = mrw^2 = m(l\sin a)w^2$.

Agafant com a eixos *x* i *y*, la horitzontal i la vertical, tenim:

$$\left.\begin{aligned} -m(l\sin a)w^2 &= -T_f\sin a + k\frac{q^2}{l^2\sin^2 a} \\ T_f\cos a &= mg \end{aligned}\right\} \Rightarrow -m(l\sin a)w^2 = -\frac{mg}{\cos a}\sin a + k\frac{q^2}{l^2\sin^2 a} \Rightarrow .$$

$$\Rightarrow w^2 = \frac{g}{l\cos a} - \frac{k}{m}\frac{q^2}{l^3\sin^3 a}$$

El període serà $T = \frac{2p}{w} \Rightarrow T = \frac{2p}{\sqrt{\frac{g}{l\cos a} - \frac{k}{m}\frac{q^2}{l^3\sin^3 a}}}$

b) La tensió de la corda serà $T_f\cos a = mg \Rightarrow T_f = \frac{mg}{\cos a}$, que és independent de les càrregues.

c) Si la càrrega central fos negativa, la força electrostàtica seria ara atractiva i hauria de tenir signe negatiu, el període seria $T = \frac{2p}{\sqrt{\frac{g}{l\cos a} + \frac{k}{m}\frac{q^2}{l^3\sin^3 a}}}$

Si no hi hagués càrregues, no existiria el terme de Coulomb i tindríem $T = \frac{2p}{\sqrt{\frac{g}{l\cos a}}}$

Problema P4

En una taula sense fregament tenim dues partícules de masses $M_1 = m_0$ i $M_2 = 3m_0$ que xoquen en una dimensió. Tant els xocs entre les partícules com de les partícules amb la paret són totalment elàstics. Inicialment la partícula 2 està aturada i la partícula 1 se li acosta des de l'esquerra a una velocitat V_0 .

1) Demostreu que després del primer xoc de la partícula 2 amb la paret les dues partícules es mouen a la mateixa velocitat cap l'altre banda de la taula. Trobeu aquesta velocitat
2) Calculeu el moment total inicial i el moment total final. Són diferents? Com és possible?
3) Quan la partícula 1 arriba a la paret esquerra rebota i torna a xocar amb la partícula 2. Quines seran les velocitats després del xoc?
4) Raoneu que posteriorment les dues partícules es tornaran a trobar en la situació inicial. Quan això passi, quantes vegades haurà rebotat la partícula 1 a la banda esquerra?

1) Primer hem de trobar les velocitats que agafen les masses M_1 i M_2 en un xoc elàstic quan una d'elles està parada i l'altre te velocitat V_0, agafant després del xoc velocitats v_1 i v_2 respectivament.

Les lleis de conservació del moment i l'energia ens permeten escriure:

$$\left.\begin{aligned} M_1V_0 &= M_1v_1 + M_2v_2 \\ \frac{1}{2}M_1V_0^2 &= \frac{1}{2}M_1v_1^2 + \frac{1}{2}M_2v_2^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} &M_1(V_0 - v_1) = M_2v_2 \\ &M_1(V_0^2 - v_1^2) = M_2v_2^2 \Rightarrow M_1(V_0 + v_1)(V_0 - v_1) = M_2v_2^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_2v_2(V_0 + v_1) = M_2v_2^2 \Rightarrow V_0 + v_1 = v_2$$

$$\left.\begin{aligned} M_1(V_0 - v_1) &= M_2v_2 \\ V_0 + v_1 &= v_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow M_1(V_0 - v_1) = M_2(V_0 + v_1) \Rightarrow (M_1 - M_2)V_0 = (M_1 + M_2)v_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}V_0$$

$$v_2 = V_0 + v_1 \Rightarrow v_2 = V_0\left(1 + \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}\right) = \frac{2M_1}{M_1 + M_2}V_0$$

En el nostre cas particular $M_1 = m_0$ i $M_2 = 3m_0$:

$$v_1 = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}V_0 \Rightarrow v_1 = \frac{m_0 - 3m_0}{4m_0}V_0 = -\frac{1}{2}V_0$$

$$v_2 = \frac{2M_1}{M_1 + M_2}V_0 \Rightarrow v_2 = \frac{2m_0}{4m_0}V_0 = \frac{1}{2}V_0$$

observis que les dues partícules agafen la mateixa velocitat però amb sentits oposats.

Quan la partícula M_2 xoca elàsticament amb la paret, simplement rebota, segueix amb la mateixa velocitat però en sentit oposat. Per tant aquesta massa tindrà ara la mateixa velocitat i sentit que la massa M_1. Les dues es mouen cap a l'esquerra del paper amb velocitat $V_0/2$.

2) El moment total inicial és m_0V_0, el moment total final, després del xoc de les masses i de la massa M_2 amb la paret és $m_0\frac{-V_0}{2}+3m_0\frac{-V_0}{2}=-2m_0V_0$. Observis que no surt igual i per tant no hi ha conservació del moment de les masses. La raó està en el xoc de la massa M_2 amb la paret; en aquest xoc intervé la paret que fa canviar el moment de la massa M_2, la paret agafa moment però com te una massa molt gran no arriba a agafar velocitat.
En el xoc elàstic amb la paret no hi ha pèrdua d'energia per la massa M_2, la paret agafa energia zero de la massa. Si calculem l'energia de les dues masses anant cap a l'esquerra del paper s'obté $\frac{1}{2}m_0\left(\frac{-V_0}{2}\right)^2+\frac{1}{2}3m_0\left(\frac{-V_0}{2}\right)^2=\frac{1}{2}4m_0\frac{V_0^2}{4}=\frac{1}{2}m_0V_0^2$ que és l'energia inicial quan la massa M_1 es mou cap a la dreta i la massa M_2 està en repòs.

3) Després de que la massa M_1 xoqui amb la paret de l'esquerra, les dues masses tornen a tenir velocitats iguals però oposades. Anem a trobar les equacions del xoc:

$$\left.\begin{array}{l} M_1V-M_2V=M_1v_1+M_2v_2 \\ \frac{1}{2}M_1V^2+\frac{1}{2}M_2V^2=\frac{1}{2}M_1v_1^2+\frac{1}{2}M_2v_2^2 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} M_1\left(V-v_1\right)=M_2\left(V+v_2\right) \\ M_1\left(V^2-v_1^2\right)=-M_2\left(V^2-v_2^2\right)\Rightarrow \\ \Rightarrow M_1\left(V+v_1\right)\left(V-v_1\right)=-M_2\left(V+v_2\right)\left(V-v_2\right) \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow V+v_1=-V+v_2\Rightarrow v_1=-2V+v_2$$

$$\left(M_1-M_2\right)V=M_1\left(-2V+v_2\right)+M_2v_2\Rightarrow\left(3M_1-M_2\right)V=\left(M_1+M_2\right)v_2\Rightarrow v_2=\frac{3M_1-M_2}{M_1+M_2}V$$

$$v_1=-2V+v_2\Rightarrow v_1=-2V+\frac{3M_1-M_2}{M_1+M_2}V=\left(\frac{3M_1-M_2}{M_1+M_2}-2\right)V=\left(\frac{M_1-3M_2}{M_1+M_2}\right)V$$

Introduint els valors $M_1 = m_0$ i $M_2 = 3m_0$ i $V = V_0/2$, tenim

$$v_2=\frac{3M_1-M_2}{M_1+M_2}V\Rightarrow v_2=\frac{3m_0-3m_0}{m_0+3m_0}\frac{V_0}{2}=0$$

$$v_1=\left(\frac{M_1-3M_2}{M_1+M_2}\right)V\Rightarrow v_1=\left(\frac{m_0-9m_0}{m_0+3m_0}\right)\frac{V_0}{2}=-V_0$$

Veiem doncs que la massa M_2 resta quieta com al començament i la massa M_1 es mou cap a l'esquerra amb la velocitat inicial, la mateixa velocitat però sentit oposat que al començament.

4) Després d'aquest segon xoc amb la massa M_2, la massa M_1 surt cap a l'esquerra fins que torna a rebotar de nou amb la paret de la esquerra. En aquest xoc simplement canvia el sentit de la velocitat i es reprodueixen les condicions inicials: massa M_1 movent-se amb velocitat V_0 cap a la dreta i massa M_2 en repòs.
Per que s'hagin donat aquestes condicions, la massa M_1 ha tingut que xocar dos cops amb la paret de l'esquerra, en el primer rebota a velocitat $V_0/2$ i en el segon ja a velocitat V_0.

Problema P5

Entre les plaques d'un condensador pla hi ha un camp elèctric constant de mòdul $\boldsymbol{E}$ = 6·10^4 N/C. Les plaques del condensador son quadrades de costat 10 cm i estan separades una distància de 2.5 cm.

a) Quina és l'acceleració d'un electró que està entre les dues plaques. Depèn aquesta acceleració de la distància a les plaques? Justifiqueu la resposta.

b) Si un electró parteix del repòs des d'una de les plaques, quant de temps que trigarà en recórrer aquesta distància? Amb quina velocitat arriba a l'altra placa?

c) Calculeu la càrrega del condensador

Dades: m_e = 9.109·10^{-31} kg, q_e = 1.602·10^{-19} C, e_0 = 8.84·10^{-12} C^2/N m^2.
Recordatori: La capacitat d'un condensador pla val: $C = e_0\ S/d$

a) La força F que actua sobre una carga q quan està sotmesa a un camp elèctric E val $F = Eq$.

L'acceleració serà $a = \dfrac{F}{m} = \dfrac{Eq}{m} \Rightarrow a = \dfrac{6{\cdot}10^4 \text{ x } 1.602{\cdot}10^{-19}}{9.109{\cdot}10^{-31}} = \dfrac{9.612}{9.109}10^{16} = 1.055{\cdot}10^{16}\ \text{m/s}^2$, on l'acceleració te sentit contrari al camp perquè la càrrega de l'electró és negativa.

En tots els punts dins de un condensador pla, el camp elèctric és constant; per tant també ho serà la força i l'acceleració.

b) La distància recorreguda per una partícula uniformement accelerada val $d = d_0 + v_0 t + \dfrac{1}{2}at^2$.

Agafant l'origen de coordenades en la placa de sortida i com ens diuen que la velocitat inicial és zero: $d = \dfrac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\dfrac{2d}{a}} \Rightarrow t = \sqrt{\dfrac{2 \text{ x } 2.5{\cdot}10^{-2}}{1.055{\cdot}10^{16}}} = \sqrt{\dfrac{5}{1.055}}10^{-9} = 2.18{\cdot}10^{-9}$ s

La velocitat amb que arriba a l'altre placa és :

$$v = at \Rightarrow v = 1.055{\cdot}10^{16} \text{ x } 2.18{\cdot}10^{-9} = 22.97{\cdot}10^{6}\ \text{m/s}^2$$

c) La capacitat d'un condensador es defineix com $C = \dfrac{Q}{\Delta V}$, on Q és la càrrega que te una de les plaques, l'altre serà igual i signe contrari, i ΔV és la diferencia de potencial entre les plaques, que val $\Delta V = Ed$, on E és el camp elèctric i d la distància entre plaques.

En el nostre cas :

$$Q = C\Delta V \Rightarrow Q = e_0 \frac{S}{d} Ed = e_0 SE \Rightarrow Q = 8.84{\cdot}10^{-12}\ \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}\left(10{\cdot}10^{-2}\right)\text{m}^2\, 6{\cdot}10^4\ \frac{\text{N}}{\text{C}} = 0.5304{\cdot}10^{-8}\ \text{C}$$

QÜESTIÓ A

Un globus d'investigació amb una massa total *M* està baixant verticalment amb una acceleració *g/2* dirigida cap el terra. Si es vol que l'acceleració del globus sigui la mateixa però dirigida cap a dalt, quina serà la massa del llast que caldrà llençar? Suposeu que la força del aire que fa pujar el globus es manté constant.

Quan el globus baixa, podem trobar la força del aire que el fa pujar a partir de la 2ª llei de Newton: $Mg - F_a = M\,\frac{g}{2}$, on observis que hem agafat el sentit positiu cap avall.

Després de treure una massa Δm de llastra, la llei de Newton donarà ara:

$(M - \Delta m)\,g - F_a = -(M - \Delta m)\frac{g}{2}$, on el signe menys del segon terme indica que ara l'acceleració és de pujada, a l'inrevés que abans.

Eliminant la força de l'aire de les dues equacions queda:

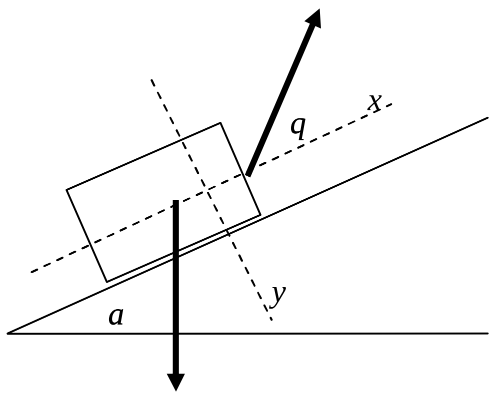
$$Mg - M\,\frac{g}{2} = (M - \Delta m)\frac{g}{2} + (M - \Delta m)\,g \Rightarrow \frac{1}{2}Mg = \frac{3}{2}(M - \Delta m)\,g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = 3(M - \Delta m) \Rightarrow \Delta m = \frac{2}{3}M$$

Noteu que $\Delta m > 0$ perquè és la massa que es treu a la inicial.

QÜESTIÓ B

Per pujar un trineu de 20 kg per un camí amb un pendent de 30º sobre l'horitzontal se li fa una força *F* mitjançant una corda que forma un angle de 45º amb el terra del camí. El coeficient de fregament entre el trineu i la neu és μ = 0.05. Si el trineu avança amb una velocitat constant de 1 m/s, calculeu el treball realitzat per la força *F* en una distància de 10 m.



En aquest problema intervenen quatre forces. Per una banda tindrem la força *F* i el pes *mg*; a més a més hi haurà la força normal *N* que fa el terra per tal que el trineu no penetri dintre seu, que és perpendicular al camí i que és igual i de sentit contrari a la component vertical al camí de les dues forces anteriors, i la força de fregament f_f, que té la direcció del camí, sentit oposat a la velocitat del cos i de mòdul proporcional a la força *N*.

Com les direccions importants son la que indica el camí i la normal a ell, agafem com eixos de coordenades *x* : direcció en el pla del camí i *y* : direcció perpendicular al camí i cap avall:

La component vertical a la superfície de la suma d'aquestes dues forces és: $mg\cos a - F\sin q$, que ha de ser una quantitat positiva per tal que hi hagi forca sobre el terra. La força de fregament valdrà : $m\left(mg\cos a - F\sin q\right)$ i anirà dirigida cap avall en la direcció del pla.

En la direcció del camí, l'enunciat ens diu que el trineu puja amb velocitat constant, l'acceleració serà zero i per tant la component de la força en la direcció del camí també ho ha de ser. Tindrem:

$$F\cos q = mg\sin a + m\left(mg\cos a - F\sin q\right) \Rightarrow F\left(\cos q + m\sin q\right) = mg\left(\sin a + m\cos a\right)$$

$$\Rightarrow F = mg\frac{\sin a + m\cos a}{\cos q + m\sin q} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = 20\cdot 9.8\frac{\sin 30^o + 0.05\cos 30^o}{\cos 45^o + 0.05\sin 45^o} = 20\cdot 9.8\frac{\frac{1}{2}\left(1+0.05\sqrt{3}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+0.05\right)} = 196\frac{1.087}{1.485} = 143.47\text{ N}$$

El treball fet per la força F serà el producte escalar de la força pel camí (és una línea recta) en la direcció x. Tindrem:

$$W = Fd\cos q \Rightarrow W = mg\frac{\sin a + m\cos a}{\cos q + m\sin q}d\cos q = mgd\frac{\sin a + m\cos a}{1 + m\tan q} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}m}{1+m}mgd = \frac{1}{2}\frac{1+0.05\sqrt{3}}{1+0.05}20\cdot 9.8\cdot 10 = 1014.2\text{ J}$$

Podem comprovar que aquest treball és la suma de l'increment d'energia potencial més el treball fet per la força de fregament. El trineu ha pujat una alçada $h = d\sin a$, i per tant amb un guany d'energia potencial $\Delta V = mgh = mgd\sin a$.

El treball fet per la força de fregament

$$W_{F_f} = \overrightarrow{F_f}\cdot\vec{d} = m\left(mg\cos a - F\sin q\right)d \Rightarrow W_{F_f} = m\left(mg\cos a - mg\frac{\sin a + m\cos a}{\cos q + m\sin q}\sin q\right)d =$$

$$= mmgd\left(\cos a - \frac{\sin a + m\cos a}{\text{ctan}q + m}\right)$$

on la força de fregament i el desplaçament tenen ara la mateixa direcció

La suma dels dos treballs dona:

$$\Delta V + W_{F_f} = mgd\sin a + mmgd\left(\cos a - \frac{\sin a + m\cos a}{\text{ctan}q + m}\right) =$$

$$= mgd\left(\sin a + m\left(\cos a - \frac{\sin a + m\cos a}{\text{ctan}q + m}\right)\right) = mgd\left(\sin a + m\cos a - m\frac{\sin a + m\cos a}{\text{ctan}q + m}\right) =$$

$$= mgd\left(\sin a + m\cos a\right)\left(1 - m\frac{1}{\text{ctan}q + m}\right) = mgd\left(\sin a + m\cos a\right)\left(\frac{\text{ctan}q + m - m}{\text{ctan}q + m}\right) =$$

$$= mgd\left(\sin a + m\cos a\right)\left(\frac{1}{1 + m\tan q}\right)$$

que és l'expressió trobada més amunt pel treball fet per F

QÜESTIÓ C

Sigui un got ple a vessar on sura un glaçó de gel. Si el volum de glaçó que està fora de l'aigua és el 10% del total del volum del glaçó. Quina serà la densitat relativa del gel respecte l'aigua (*?g / ?a*) ? Si el glaçó es fon, vessarà l'aigua del got? Perquè?

Recordatori: "Tot cos submergit en un fluid experimenta una força vertical i cap amunt igual al pes del fluid desallotjat" (Principi d'Arquímedes)

El volum del glaçó *V* té el 90% dins de l'aigua, desallotjant una massa d'aigua $m_a = 0.9V r_a$ que pesa $m_a g = 0.9V r_a g$. Per l'altra banda tot el glaçó pesa $m_g g = V r_g g$. No tenint en compte l'efecte de l'aire desallotjat per la part no submergida del glaçó, la densitat de l'aire i per tant la seva massa és molt petita, el glaçò està en equilibri i per tant la força d'Arquímedes i el pes son iguals i de sentit contrari; podem escriure:

$$m_a g = m_g g \Rightarrow 0.9V r_a g = V r_g g \Rightarrow 0.9 r_a = r_g$$

per tant la densitat del gel és el 90% de la de l'aigua.

Si el volum del got és V_g, com el got està ple a vessar aquest volum serà el de l'aigua V_a més el de la part submergida del volum del glaçó 0.9*V*. La part que surà del glaçó no la podem comptar com volum del got. Quan tota la massa de gel del glaçó es fon passant a aigua, el volum d'aigua que afegirem a l'original del got serà $V_{aigua-afegida} = \frac{m}{r_a} = \frac{m}{\frac{r_g}{0.9}} = 0.9\frac{m}{r_g} = 0.9V$, ja que tota la massa del gel es converteix en aigua. Observeu que aquest volum d'aigua és precisament el volum que ocupava la part submergida del glaçó; per tant el got segueix completament ple, però no s'ha vessat gens d'aigua.

QÜESTIÓ D

Si per alguna causa interna, el radi de la Terra es reduís a la meitat sense que canviés la seva massa,

a) quin seria el valor de l'acceleració de la gravetat en la nova superfície?

b) es modificaria apreciablement la seva òrbita al voltant del Sol? I la durada del dia?

a) La llei de la gravitació ens diu que l'atracció entre dos cossos separats està donada per $F = G\frac{Mm}{d^2}$, on *G* és la constant de gravitació universal, *M* i *m* son les masses dels cossos i *d* és la distància que separa els seus centres de massa. Si un dels cossos és el planeta Terra, de massa M_T, i l'altre cos està situat en la seva superfície $d = R_T$, on R_T és el radi de la Terra, a aquesta força se l'anomena pes. Per tant serà $mg = G\frac{M_T m}{R_T^2} \Rightarrow g = G\frac{M_T}{R_T^2}$. Si el radi de la Terra es redueix a la meitat, l'acceleració de la gravetat es fa quatre cops més gran.

b1) La llei de la gravetat també ens dona la força d'atracció del Sol amb la Terra; ara les masses seran les del Sol i la Terra i d la distància entre ambdós cossos. Si simplement es redueix el radi de la Terra sense afectar al Sol, ni la massa de la Terra ni la posició de la Terra en l'espai podem deduir que la força d'atracció no varia i per tant tampoc l'òrbita.

b2) La Terra és una esfera de massa M_T i radi R_T que gira amb velocitat angular $w = \frac{2p\,R_T}{T_d}$ al voltant d'un eix que passa pel seu centre, on T_d és la durada d'un dia. El moment cinètic de rotació serà $L = Iw \Rightarrow L = \frac{2}{5} M_T R_T^2 w$ on hem escrit l'expressió del moment d'inèrcia d'una esfera respecte a un eix que passa pel seu centre. Podem escriure :

$$L = \frac{2}{5} M_T R_T^2 \cdot \frac{2p\,R_T}{T_d} = \frac{4p}{5} \cdot \frac{M_T R_T^3}{T_d}$$

Si les forces que intervenen en el procés de disminuir el radi sense modificar la massa son forces internes de la Terra, no és un efecte causat per causes externes, cal que es conservi el moment cinètic. A més a més l'expressió de dalt seguirà sent correcte perquè no canviem la forma del planeta. Podrem escriure:

$$La = Ld \Rightarrow \frac{4p}{5} \cdot \frac{M_T R_{Ta}^3}{T_{da}} = \frac{4p}{5} \cdot \frac{M_T R_{Td}^3}{T_{dd}} \Rightarrow \frac{R_{Ta}^3}{T_{da}} = \frac{R_{Td}^3}{T_{dd}} \Rightarrow T_{dd} = \frac{R_{Td}^3}{R_{Ta}^3} T_{da}$$

on els subíndexs *a* i *d* fan referència a abans i després de la disminució del radi. Si el nou radi és la meitat de l'original, la durada del dia serà la vuitena part de l'actual, o sigui 3 hores.

QÜESTIÓ E

Un corrent de 10 A circula per un fil de coure de secció transversal 3x10^{-6} m^2. Trobeu la velocitat mitjana dels electrons en el fil.

Dades:	Càrrega de l'electró :	1.6·10^{-19} C.
	Pes atòmic del coure :	63.5 g/mol.
	Número d'Avogadro :	6.02 ·10^{23} àtoms/mol.
	Densitat :	8.96 g/cm^3

Suposar que cada àtom de coure contribueix amb un electró lliure a la conducció a través del fil.

Com la corrent és de 10 A, per una secció del conductor passaran 10 coulombs en 1 segon. Com la càrrega d'un electró és e = 1.6·10^{-19} C, el número d'electrons que han de creuar la secció del fil serà $ne = 10\text{ C} \Rightarrow n = \frac{10\text{ C}}{e} = \frac{10\text{ C}}{1.6\cdot 10^{-16}\text{ C}} = 6.25\cdot 10^{16}$. [1]

Si v és la velocitat mitjana dels electrons, tots aquells que estiguin a una distància més petita de dmax = v ·1s, on dmax es mesura en metros si la velocitat és m/s, podran travessar la secció on mesurem la càrrega que passa. Aquesta distància, juntament amb la secció del fil de coure defineix un volum que serà V = 3·10-6dmax =3·10-6v expressat en m^3.

El número d'àtoms de coure, i per tant d'electrons lliures, que hi ha en un metre cúbic de metall és: $N = 8.96 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3} 10^6 \frac{\text{cm}^3}{\text{m}^3} \frac{1}{63.5} \frac{\text{mol}}{\text{gr}} 6.02\cdot 10^{23} \frac{\text{àtoms}}{\text{mol}} = 0.85\cdot 10^{29} \frac{\text{àtoms}}{\text{m}^3}$

Per tant en un volum V hi hauran $n = NV \Rightarrow n = 0.85\cdot 10^{29}$ x 3·10-6$v = 2.55\cdot 10^{23} v$ [2]

Igualant aquest resultat [2] amb el de més amunt [1], podem deduir la velocitat mitjana dels electrons $6.25\cdot 10^{16} = 2.55\cdot 10^{23} v \Rightarrow v = \frac{6.25\cdot 10^{16}}{2.55\cdot 10^{23}} = 0.24\cdot 10^{-6}$ m/s